Electrostatics

- Coulomb's law
- Gauss' law
- Electrostatic Energy
- Electrostatic Fields in Material
- Capacitance & Capacitors + Electrostatic forces
- Solution of Electrostatic Problems

ELECTROMAGNETICS

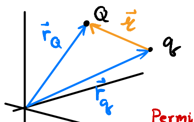
9E EECU103

4

▶ Coulomb's law

• Electric Force แรงทางไฟฟ้าที่ q ทำต่อ Q

คำนวณเครื่องหมายประจุด้วย



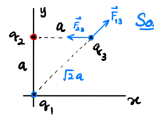
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{a}_r \quad [N]$$

Permittivity of free space: $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8.988\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$

Seperation vector: $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_q$

ex) Consider three point charges located at the corner of a right triangle as shown in a figure, where $q_1 = q_3 = 5.00\,\mu C$, $q_2 = -2.00\,\mu C$, and $a = 0.100$ m. Find the resultant force exerted on q_3.



Sol^n $\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\vec{a}_{r_{13}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{(a\sqrt{2})^2}\left(\frac{\vec{a}_x+\vec{a}_y}{\sqrt{2}}\right)$

$= (8.988\times10^9)\frac{(5.00\times10^{-6})(5.00\times10^{-6})}{(0.100\sqrt{2})^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_x+\vec{a}_y)$ N

$= (7.944)(\vec{a}_x+\vec{a}_y)$ N

$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}^2}\vec{a}_{r_{23}} = (8.988\times10^9)\frac{(-2.00\times10^{-6})(5.00\times10^{-6})}{(0.100)^2}\vec{a}_x = 8.988\,\vec{a}_x$ N

$\therefore \vec{F}_{net} = \vec{F}_{13}+\vec{F}_{23} = \boxed{[-1.044\,\vec{a}_x + 7.944\,\vec{a}_y]\text{ N}}$

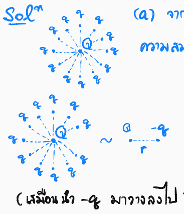
ex) Twelve equal charges, q, are situated at the corners of a regular 12-sided polygon.

(a) What is the net force on a test charge Q at the center?

(b) If one of 12 q's is removed. What is the force on Q?

Sol^n (a) จาก Principle of superposition ความสมมาตรทำให้แรงจะหักล้างกันหมด

$\therefore \boxed{\vec{F}_{net} = \vec{0}}$



(เหมือนนำ $-q$ มาวางลงไป)

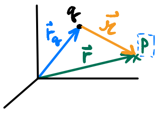
(b) กำหนดให้ r เป็นระยะห่างระหว่าง Q และ q ทางรูปได้ว่า

$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\text{ N}}$ ทิศชี้ไปยังตำแหน่งที่ q หายไป

• Electric Field $\vec{F} = Q\vec{E}$ | $\vec{E} = \lim_{Q\to0}\frac{\vec{F}}{Q}$

สนามไฟฟ้าจาก q ที่จุด P

คำนวณเครื่องหมายด้วย

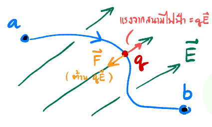


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{a}_r \quad [N/C]\ [V/m]$$

$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_q$

• Work in Electric Field

งานที่ใช้ในการย้ายประจุ q จาก a ไป b (ความเร็วคงที่)



แรงที่เราทำเพื่อต้าน แรงจากสนามไฟฟ้า

$\vec{F} = -q\vec{E}$

$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l}$

$W_{a\to b} = q\left[-\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}\right]$ [J]

คิดเครื่องหมายด้วย

• Electric Potential

$W_{a\to b(ext)} = qV_b - qV_a$

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} \quad [V]$$

ศักย์ไฟฟ้าที่ $\vec{r}$ $\quad \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_q$

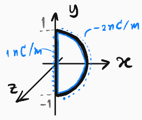
ความต่างศักย์

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V} \quad \left(\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0\right)$$

$\nabla\times\vec{E} = 0$

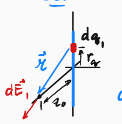
ex) A semicircular line charge is on z=0 plane and has the charge density as follows



$$\rho_\ell(r,\phi) = \begin{cases} 1\ \text{nC/m} & ;\ 0<r<1,\ \phi = \pm 90^\circ \\ -2\ \text{nC/m} & ;\ r=1,\ -90^\circ<\phi<90^\circ \\ 0 & ;\ \text{otherwise}\end{cases}$$

Find $\vec{E}$ and V at $(0,0,z_0)$. Given that $V=0$ at ∞.

Sol^n ใช้ระบบ Cylindrical Coordinates



$dq_1 = \rho_\ell dr$

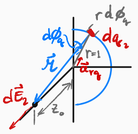
$\vec{r} = z_0\vec{a}_z - r\vec{a}_r$

$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

$dq_2 = \rho_\ell r\,d\phi_q$

$\vec{r} = z_0\vec{a}_z - r\vec{a}_{r_q}$

$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$



$\vec{E}_1 = \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{(z_0\vec{a}_z - r_q\vec{a}_x)dr_q}{(z_0^2+r_q^2)^{3/2}}$ (ฟังก์ชันคี่ ตัดกัน)

$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[z_0\vec{a}_z\frac{r_q}{z_0^2\sqrt{z_0^2+r_q^2}}\Big|_{-1}^{1} - \vec{a}_x\frac{-1}{\sqrt{z_0^2+r_q^2}}\Big|_{-1}^{1}\right]$

$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{a}_z\frac{2}{z_0\sqrt{z_0^2+1}}\right)$ V/m

$\vec{E}_2 = \frac{-2\times10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(z_0\vec{a}_z - \vec{a}_{r_q})}{(z_0^2+1)^{3/2}}d\phi_q$

$= \frac{-10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0(z_0^2+1)^{3/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(z_0\vec{a}_z - (\vec{a}_x\cos\phi_q + \vec{a}_y\sin\phi_q))d\phi_q$

$= \frac{-10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0(z_0^2+1)^{3/2}}(z_0\pi\vec{a}_z - 2\vec{a}_x)$ V/m

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[4\vec{a}_x + \vec{a}_z\left(\frac{1}{z_0\sqrt{z_0^2+1}} - \frac{2z_0\pi}{(z_0^2+1)^{3/2}}\right)\right]\text{ V/m}}$$

$dV_1 = \frac{dq_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{10^{-9}dr_q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z_0^2+r_q^2}}$

$V_1 = \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{dr_q}{\sqrt{z_0^2+r_q^2}}$

$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(r_q+\sqrt{z_0^2+r_q^2}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{1+\sqrt{z_0^2+1}}{-1+\sqrt{z_0^2+1}}\right]$ V.

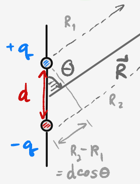
$dV_2 = \frac{dq_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{-2\times10^{-9}d\phi_q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z_0^2+1}}$

$V_2 = \frac{-10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\phi_q}{\sqrt{z_0^2+1}} = \frac{-10^{-9}}{2\varepsilon_0\sqrt{z_0^2+1}}$ V.

$$\therefore \boxed{V = \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{z_0^2+1}} + \ln\left[\frac{\sqrt{z_0^2+1}+1}{\sqrt{z_0^2+1}-1}\right]\right)\text{ V.}}$$

Dipole

Dipole moment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (ชี้จาก ⊖ ไป ⊕)



Potential: $\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{R^2}} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

Electric field: $\vec{E} = -\nabla V = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(2\cos\theta\,\vec{a}_R + \sin\theta\,\vec{a}_\theta)$

Proof: $V_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

$V_{-q} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$V = V_{+q}+V_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right]$

ที่ R มากๆ: $R_2 \approx R_1 \approx R$ และ $R_2 - R_1 \approx d\cos\theta$

$\therefore V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

$\vec{E} = -\nabla V$

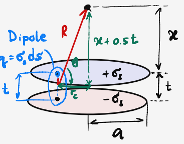
$= -\left[\vec{a}_R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right) + \vec{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)\right]$

$= -\left[\vec{a}_R\left(\frac{-2qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) + \vec{a}_\theta\left(\frac{-qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)\right]$

$= \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2\cos\theta\,\vec{a}_R + \sin\theta\,\vec{a}_\theta\right]$

• Surface dipole ⇒ พิจารณา dQ เป็น dipole ย่อยๆ

ex) A circular disk with the radius of a m. and the thickness of t m. has the uniform charge density $+\sigma_s$ and $-\sigma_s$ C/m² at its front and its back surfaces, respectively. Find V and $\vec{E}$ at x m above the disc center. (x >> t)



Sol^n จาก $V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ จะได้ว่า

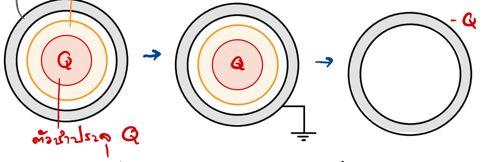
$dV = \frac{\sigma_s ds\ t\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(x+0.5t)^2} \approx \frac{\sigma_s(r_c dr_c d\theta)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r_c^2)}\frac{tx}{\sqrt{x^2+r_c^2}} = \frac{\sigma_s tx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_c dr_c d\theta}{(x^2+r_c^2)^{3/2}}$

$V = \frac{\sigma_s tx}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{r_c dr_c d\theta_c}{\sqrt{x^2+r_c^2}^3} = \boxed{\frac{\sigma_s t}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\text{ V.}}$

$\vec{E} = -\nabla V = \boxed{\frac{\sigma_s t a^2}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{a}_x\text{ V/m}}$

▶ Gauss' Law (ใน free space)

• Faraday Experiment & Flux



ตัวนำทรงกลมไม่มีประจุ

ฉนวน

ตัวนำประจุ Q

−Q

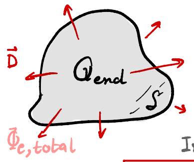
นำทรงกลมตัวนำที่มีประจุ Q หุ้มด้วยฉนวน จากนั้นนำทรงกลมกลวงอีกใบมาครอบไว้แล้วต่อ GND พบว่าเมื่อนำทรงกลมกลวงนั้นออกมา ทรงกลมนั้นมีประจุ −Q

Flux ที่เคลื่อนที่ในสนาม

∵ Q ภายในตัวนำ ผลักประจุ Q ของผิวนอกไปที่ผิวของตัวนำด้านนอก (ลง GND ไป)

Electric Flux ที่ออกจากปริมาตร } $\Phi_{e,total} = Q_{encl}$ [C]

ประจุที่อยู่ภายในปริมาตร



Electric flux density [C/m²]

$$\Phi_{e,total} = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

	Integral form	Differential form
Gauss' Law:	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{encl}$	$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ (ใน free space)	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

* ในฟิสิกส์จะใช้ $\Phi_E = \oint\vec{E}\cdot d\vec{s}$ ในวิศวกรรมจะใช้ $\Phi_e = \oint\vec{D}\cdot d\vec{s}$ *

• The Divergence of E:

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{all space}}\rho(\vec{r}')\frac{\vec{a}_r}{r^2}dv'$

$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\nabla\cdot\left(\frac{\vec{a}_r}{r^2}\right)\rho(\vec{r}')dv'$

เนื่องจาก $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{a}_r}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{r})$

$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')dv'$

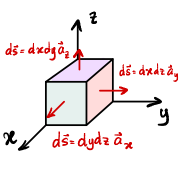
$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$

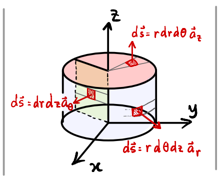
Divergence theorem:

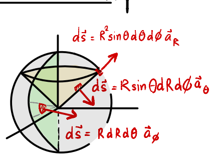
$\int_V(\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}))dv = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r})dv$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_{encl}$

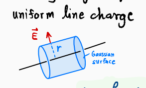
ทิศ $d\vec{s}$ ของ Gaussian Surface ใน Coordinates ต่างๆ





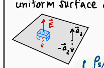


Infinitely long, straight, uniform line charge



$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r$

Infinite planar charge with a uniform surface charge density

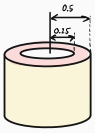


$\vec{E} = \begin{cases}\rho_s/2\varepsilon_0\,\vec{a}_z &, z>0 \\ -\rho_s/2\varepsilon_0\,\vec{a}_z &, z<0\end{cases}$

(ex) A very long hollow cylinder with charge density

$$\rho_v(r) = \begin{cases} \rho_v \ C/m^3 ; & 0.25\ m < r < 0.5\ m \\ 0 \ C/m^3 ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find $\vec{E}$ and V everywhere. Given that $V = 0$ V. at $r = 2$ m.



Sol^n Gauss' Law $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{encl}$

$r < 0.25$ m: $Q_{encl} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$

$0.25\,m \le r \le 0.5\,m$: $Q_{encl} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{0.25}^{r} \rho_v r_c \, dr_c \, d\phi_c \, dz_c$

$= \rho_v \pi L (r^2 - \frac{1}{16})$

$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} D_r \vec{a}_r \cdot r\, d\phi\, dz\, \vec{a}_r = D_r (2\pi r L)$

$\therefore \vec{D} = \frac{\rho_v}{2}(r - \frac{1}{16r}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}(r - \frac{1}{16r})$

$r > 0.5$ m : $Q_{encl} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{0.25}^{0.5} \rho_v r_c \, dr_c \, d\phi_c \, dz_c = \rho_v \pi L (\frac{3}{16})$

$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = D_r(2\pi r L) \quad \therefore \vec{D} = \frac{3\rho_v}{32 r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0 r}$

$$\therefore \boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} \ V/m & ; r \le 0.25\ m \\ \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}(r - \frac{1}{16r}) \ V/m & ; 0.25\,m < r \le 0.5\,m \\ \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0 r} \ V/m & ; r > 0.5\ m \end{cases}}$$

จาก $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$ และ $V_B = 0$ V. ที่ $r = 2$m.

จะได้ว่า $r > 0.5$ m: $V - 0 = -\int_2^r \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0} \ln(\frac{2}{r})$ V/m

$0.5\,m \ge r > 0.25\,m$: $V = -\left[\int_2^{0.5} \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0}\frac{1}{r} dr + \int_{0.5}^{r} \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}(r - \frac{1}{16r}) dr\right]$

$V = \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0}\ln 4 + \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{8} - \frac{r^2}{2} - \frac{1}{16}\ln(\frac{0.5}{r})\right]$

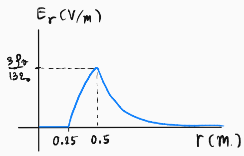
$V = \frac{\rho_v}{32\varepsilon_0}\left[2 - 8r^2 + \ln(128 r)\right]$ V/m

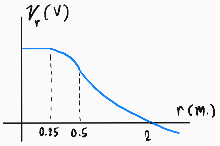
$r \le 0.25$ m : $V = -\left[\int_2^{0.5} \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0}\frac{1}{r} dr + \int_{0.5}^{0.25} \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}(r - \frac{1}{16r}) dr\right]$

$V = \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0}\ln 4 + \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\left[\frac{3}{32} - \frac{1}{16}\ln(2)\right]$

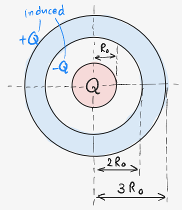
$V = \frac{\rho_v}{32\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2} + \ln(32)\right]$ V/m

$$\therefore \boxed{V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_v}{32\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2} + \ln(32)\right] V & ; r \le 0.25\ m \\ \frac{\rho_v}{32\varepsilon_0}\left[2 - 8r^2 + \ln(128r)\right] V & ; 0.25\,m < r \le 0.5\,m \\ \frac{3\rho_v}{32\varepsilon_0}\ln(\frac{2}{r}) V & ; r > 0.5\ m \end{cases}}$$





(ex) Put Q C charge to the metal sphere of the radius R_0 m. cover the metal sphere with another sphere of the inner radius $2R_0$ m. and the outer radius of $3R_0$ m. The spheres have the same center and are divided by air. Find $\vec{D}$ and V Given that $V = 0$ V. at $R = 3R_0$



Sol^n ประจุอยู่ที่ผิวตัวนำ

$R < R_0$: $Q_{encl} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$

$R_0 < R < 2R_0$: $Q_{encl} = Q \Rightarrow D_R = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$2R_0 < R < 3R_0$: $Q_{encl} = Q - Q = 0 \Rightarrow \vec{D}_R = \vec{0}$

$R > 3R_0$: $Q_{encl} = Q \Rightarrow D_R = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$$\therefore \boxed{\vec{D} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{a}_R \ C/m^2 ; & R_0 < R < 2R_0,\ R > 3R_0 \\ \vec{0} \ C/m^2 ; & \text{otherwise} \end{cases}}$$

$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}$: $\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R \ V/m & ; R_0 < R < 2R_0,\ R > 3R_0 \\ \vec{0} \ V/m & ; \text{otherwise} \end{cases}$

$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$

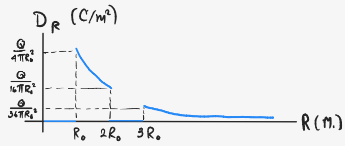
$R > 3R_0$: $V - 0 = -\int_{3R_0}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R_0}\right]$ V.

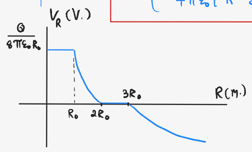
$2R_0 < R \le 3R_0$: $V = 0$ V.

$R_0 < R \le 2R_0$: $V = -\int_{2R_0}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_0}\right]$ V.

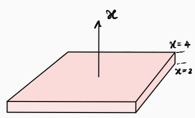
$R \le R_0$: $V = -\int_{2R_0}^{R_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R_0}$ V.

$$\therefore \boxed{V = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R_0} \ V. & ; R \le R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_0}\right] V. & ; R_0 < R \le 2R_0 \\ 0 \ V. & ; 2R_0 < R \le 3R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R_0}\right] V. & ; R > 3R_0 \end{cases}}$$

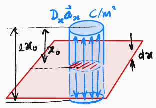




(ex) A charge density of $2x$ $\mu C/m^3$ exists in the volume $2 \le x \le 4$. Find $\vec{D}$, $\vec{E}$ and V in all region. Given that $V = V_0$ at $x = 5$



Sol^n แบ่งประจุออกเป็นแผ่นบางๆ หนา dx_c ซึ่งอยู่ภายในบริเวณ $2 \le x \le 4$ ที่ตำแหน่ง $x = x$ และ สร้าง Gaussian surface เป็นทรงกระบอก สูง $2x_0$ รัศมี r_0 จะได้ว่า



พิจารณา $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = D_x 2\pi r_0^2$

และ $Q_{encl} = \rho \pi r_0^2 dx = 2x\pi r_0^2 dx \times 10^{-6}$

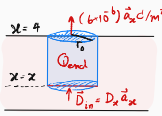
จาก $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{encl} \quad \therefore \vec{D} = (x \times 10^{-6})\, dx\ \vec{a}_x$

(ที่ตำแหน่งเหนือแผ่น dx)

นั่นคือ $\vec{D}$ ที่เกิดจากประจุทั้งปริมาตร $\vec{D} = \int_2^4 (x\times 10^{-6})\vec{a}_x dx = (6\times 10^{-6})\,\vec{a}_x$ C/m²

(ที่ตำแหน่ง $x \ge 4$ m.)

ในทำนองเดียวกัน ที่ $x \le 2$ m. $\quad \vec{D} = (-6\times 10^{-6})\,\vec{a}_x$ C/m²



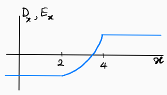
หา $\vec{D}$ ภายในปริมาตร

จากรูป $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = (6\times 10^{-6} - D_x)\pi r_0^2$

$Q_{encl} = \int_x^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \rho_v r\, dr\, d\phi\, dx = \pi r_0^2 (16 - x^2)\times 10^{-6}$

จาก Gauss' law จะได้ว่า $D_x = (x^2 - 10)\times 10^{-6} \Rightarrow \vec{D} = (x^2 - 10)\times 10^{-6}\,\vec{a}_x$ C/m²

$$\therefore \boxed{\vec{D} = \begin{cases} (-6\times 10^{-6})\vec{a}_x \ C/m^2 & ; x \le 2 \\ (x^2 - 10)\times 10^{-6}\vec{a}_x \ C/m^2 & ; 2 < x < 4 \\ (6\times 10^{-6})\vec{a}_x \ C/m^2 & ; x \ge 4 \end{cases}}$$



หา $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}(-6\times 10^{-6})\vec{a}_x \ V/m & ; x \le 2 \\ \frac{1}{\varepsilon_0}(x^2 - 10)\times 10^{-6}\vec{a}_x \ V/m & ; 2 < x < 4 \\ \frac{1}{\varepsilon_0}(6\times 10^{-6})\vec{a}_x \ V/m & ; x \ge 4 \end{cases}}$$

หา $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$x \ge 4$: $V - V_0 = -\int_5^x \frac{1}{\varepsilon_0}(6\times 10^{-6})\,dx = \frac{6\times 10^{-6}}{\varepsilon_0}(5 - x)$

$V = V_0 + \frac{6\times 10^{-6}}{\varepsilon_0}(5 - x)$ V.

$2 < x < 4$: $V - V_0 = -\left[\int_5^4 \frac{1}{\varepsilon_0}(6\times 10^{-6})\,dx + \int_4^x \frac{1}{\varepsilon_0}(x^2 - 10)\times 10^{-6}\,dx\right]$

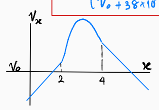
$V = V_0 + \frac{10^{-6}}{3\varepsilon_0}(30x - x^3 - 38)$ V.

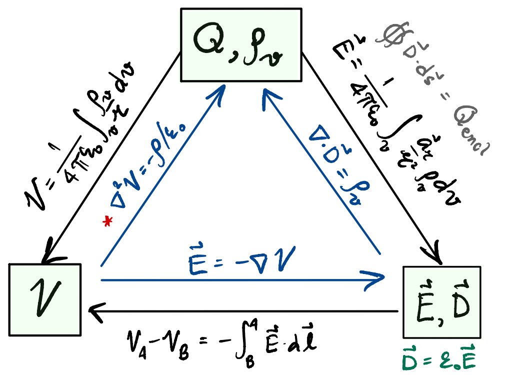
$x \le 2$: $V - V_0 = -\left[\int_5^4 \frac{1}{\varepsilon_0}(6\times 10^{-6})\,dx + \int_4^2 \frac{1}{\varepsilon_0}(x^2 - 10)\times 10^{-6}\,dx + \int_2^x \frac{1}{\varepsilon_0}(-6\times 10^{-6})\,dx\right]$

$V = V_0 + \frac{10^{-6}}{3\varepsilon_0}(18x - 22)$ V.

แทนค่า $\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-12}$ F/m

$$\boxed{V = \begin{cases} V_0 + 678\times 10^3 (5 - x) \ V & ; x \ge 4 \\ V_0 + 38\times 10^3 (30x - x^3 - 38) \ V & ; 2 < x < 4 \\ V_0 + 38\times 10^3 (18x - 22) \ V & ; x \le 2 \end{cases}}$$





(ex) A spherical symmetrical potential distribution is given as

$$\vec{E}(R) = \frac{e^{-\lambda R}}{R^2}(1 + \lambda R)\,\vec{a}_R$$

Find the charge distribution which would produce this potential field.

Sol^n พิจารณา $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$ และ $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$

$\rho_v = \nabla\cdot\left(\frac{\varepsilon_0 e^{-\lambda R}}{R^2}(1 + \lambda R)\vec{a}_R\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^2\left(\frac{\varepsilon_0 e^{-\lambda R}}{R^2}(1 + \lambda R)\right)\right]$

$= \frac{1}{R^2}\left[-\lambda\varepsilon_0 e^{-\lambda R}(1 + \lambda R) + \lambda\varepsilon_0 e^{-\lambda R}\right]$

$= -\frac{\varepsilon_0 \lambda^2}{R} e^{-\lambda R}$ C/m³

สังเกตว่า $\lim_{R\to 0} \rho_v = \infty$

พิจารณา เมื่อ R มีค่าน้อยๆ $\vec{D} = \frac{\varepsilon_0 e^{-\lambda R}}{R^2}(1 + \lambda R)\vec{a}_R \approx \frac{\varepsilon_0 \vec{a}_R}{R^2}$

$\rho_v = \nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\varepsilon_0\frac{\vec{a}_R}{R^2} = 4\pi\varepsilon_0\delta^3(\vec{R})$

จะได้ว่า ที่ origin $\rho_v = 4\pi\varepsilon_0\delta^3(\vec{R})$

$\therefore$ คำตอบที่สมบูรณ์ คือ

$$\boxed{\rho_v = -\frac{\varepsilon_0\lambda^2}{R}e^{-\lambda R} + 4\pi\varepsilon_0\delta^3(\vec{R}) \ C/m^3}$$

$*$ $\nabla^2 V = \nabla\cdot(\nabla V) = -\rho/\varepsilon_0$ คือ Poisson Equation $*$

Electrostatic Energy

- **Work in Electric Field** :

$W = Q[V_f - V_i] = Q[-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}]$ (Point Charge)

(งานที่ใช้ในการย้ายประจุ Q หรือ dq)

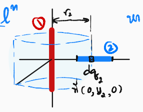
$W = dq\,(V_f - V_i) = dq\,[-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}]$ (Actual Charge)

- **Energy of a charge distribution**

งานที่ใช้ในการสร้างระบบ → พลังงานสะสมในระบบ

Point charges	Continuous Distribution
$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ (นับให้ไม่ซ้ำคู่)	$W = \frac{1}{2}\int \rho_v V\,dv$
$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ (นับซ้ำ)	$W = \frac{1}{2}\int(\nabla\cdot\vec{D})V\,dv$ $= \frac{1}{2}\int[\nabla\cdot(\vec{D}V) - \vec{D}\cdot\nabla V]\,dv$ $= \frac{1}{2}[\oint_s \vec{D}V\,d\vec{s} + \int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv]$ คลุมทั้งระบบ : $R\to\infty \to \oint \vec{D}V d\vec{s} = 0$
$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(r_i)$ ศักย์ไฟฟ้าตรงตำแหน่งที่ q_i อยู่ จากประจุอื่นๆ : $V(r_i) = \sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$	$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{\text{all space}} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv}$ [J] (พลังงานสะสมทั้งหมดของระบบ)

(ex) A system in free space consists of two uniform line charge. The first line charge ($\rho_{l_1} = -1$ nC/m) is on z axis. The second line charge ($\rho_{l_2} = 1$ nC/m) is located between (0,1,0) and (0,3,0). Find the work in moving the second line charge to be between (0,2,0) and (0,4,0).



Sol^n หา $\vec{D}$ ที่ y_2 : $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = 2\pi r_2 L D_r$, $Q_{encl} = \rho_{l_1}(L)$

$\therefore D_r = \frac{\rho_{l_1}}{2\pi r_2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_{l_1}}{2\pi r_2}\vec{a}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D} \therefore \vec{E} = \frac{\rho_{l_1}}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\vec{a}_r = \frac{(-10^{-9})}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\vec{a}_r$

งานที่ใช้เคลื่อน dq_2 จาก $(0,y_2,0)$ ไป $(0,y_2+1,0)$

$dW = dq_2\left[-\int_{y_2}^{y_2+1}\left(\frac{(-10^{-9})}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r\right)\cdot(\vec{a}_r\,dr)\right]$

$= dq_2\left(\frac{10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0}\right)\ln\left(\frac{y_2+1}{y_2}\right)$

หางานที่ใช้เคลื่อนประจุทุกตัว ($dq_2 = \rho_{l_2}dy_2$)

$W = \int_1^3 (10^{-9})\left(\frac{10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0}\right)\ln\left(\frac{y_2+1}{y_2}\right)dy_2$ $\int \ln y\,dy = y\ln y - y$ (by part)

$= \frac{10^{-18}}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\left[(y_2+1)\ln(y_2+1) - (y_2+1)\right] - \left[y_2\ln(y_2) - y_2\right]\right\}\Big|_1^3$

$= \frac{10^{-18}}{2\pi\varepsilon_0}\{6\ln 2 - 3\ln 3\} = 1.55\times10^{-8}$ J $= \boxed{15.5\text{ nJ}}$

Energy Density [J/m³]

(พลังงานต่อหน่วยปริมาตร)

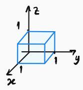
$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\rho_v V}$ Source เก็บพลังงาน ทั้งหมดเท่าไหร่ หาทั้งระบบ

⇅

$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$ สนามในแต่ละตำแหน่ง เก็บพลังงานเท่าไหร่ หาในบริเวณต่างๆ

* $\vec{D}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}D^2$ *

(ex) Given a potential $V = 3x^2 + 4y^2$ V, find the energy stored in the volume described by $0 \le x, y, z \le 1$ m.



Sol^n $\vec{E} = -\nabla V = -(6x\vec{a}_x + 8y\vec{a}_y)$, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = -\varepsilon_0(6x\vec{a}_x + 8y\vec{a}_y)$

$W = \frac{1}{2}\int_v \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$

$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (-\varepsilon_0(6x\vec{a}_x + 8y\vec{a}_y))\cdot(-(6x\vec{a}_x + 8y\vec{a}_y))\,dx\,dy\,dz$

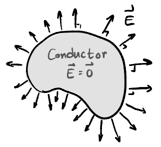
$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varepsilon_0(36x^2 + 64y^2)\,dx\,dy\,dz$

$= 1.48\times10^{-10}$ J $= \boxed{148\text{ pJ}}$

Electrostatic Fields in Material

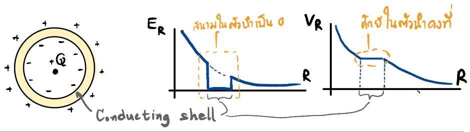
- Conductor → Free electrons
- Semiconductor → Holes & Electrons (ยังจะไม่กล่าวถึงในระดับนี้)
- Dielectric → No free electron

- **Conductors**



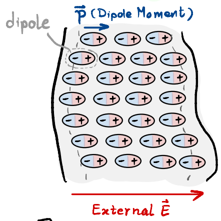
- ภายในตัวนำ $\vec{E} = \vec{0}$ ← V คงที่
- ภายในตัวนำ $\rho = 0$
- ประจุอยู่ที่ผิวของตัวนำ
- สนามตั้งฉากกับผิวตัวนำ (ด้านนอก) $\Rightarrow \begin{cases} E_t = 0 \\ E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \end{cases}$ — Surface charge Density

Why? : เมื่อมีสนามจากภายนอก $\vec{E}_0$ e⁻ ในตัวนำจะเคลื่อนที่ตามสนามนั้น ซึ่งทำให้เกิดสนามต้านภายในตัวนำ ($\vec{E}_{in}$) จนสนามรวมเป็น 0 (ประจุไม่เคลื่อนที่แล้ว)



- **Dielectrics** → วัสดุที่เป็นฉนวน (ไม่มี free charge) ประจุในวัสดุจะเคลื่อนที่ไม่ได้ (Bound charge)

อย่างไรก็ตามเมื่อใส่ $\vec{E}$ จากภายนอก โมเลกุลจะมี **induced dipole** ซึ่งจะเกิดการจัดเรียงตัวตาม $\vec{E}$ (วัสดุบางอย่างมี permanent dipole moment : "electrates")



Polarization vector : $\vec{P} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{p}}{\Delta v}$ [C/m²]

(Dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร)

$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$ $-q \xrightarrow{\vec{d}} +q$

สำหรับ Linear dielectrics: $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$ — Electric susceptibility [dimentionless]; $\vec{E}$ — External $\vec{E}$

ประจุที่เกิดจาก Polarization:

- Bound Surface Charge Density: $\rho_{s_b} \equiv \vec{P}\cdot\vec{a}_n$
- Bound volume Charge Density: $\rho_{v_b} \equiv -\nabla\cdot\vec{P}$

* (พิสูจน์โดยหา V ของ dipole) *

จาก $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}_r}{r^2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\vec{P}\cdot\vec{a}_r\,dv}{r^2}$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)dv$; $\nabla'\frac{1}{r} = \frac{\vec{a}_r}{r^2}$

$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s \frac{1}{r}\vec{P}\cdot d\vec{s}}_{\rho_{sb} = \vec{P}\cdot\vec{a}_n} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{1}{r}(\nabla\cdot\vec{P})\,dv}_{\rho_{vb} = -\nabla\cdot\vec{P}}$

จะเห็นได้ว่า Polarlization ทำให้เกิด bound charge: $\rho_{v_b} = -\nabla\cdot\vec{P}$

ต่อไปจะพิจารณา สนามที่เกิดจากประจุทั้งหมด ($\rho_{tot} = \rho_f + \rho_b$)

Gauss' Law: $\rho_{tot} = \rho_f + \rho_b$ (ประจุอิสระ)

$\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E} = \rho_f - \nabla\cdot\vec{P}$

$\rho_f = \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})$ → นิยาม : $\boxed{\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f}$ -- free charge

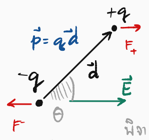
$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$ → $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

$\vec{D}$: Electric flux density / Electric Displacement [C/m²]

ε_r: Relative Permittivity / Dielectric constant, $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$

>> **Dielectric strength** : $\vec{E}_{ext}$ สูงสุดที่วัสดุทนได้ (Dielectric breakdown : e⁻ หลุดแล้วไปชนจนโครงสร้างเสียหาย)

Allignment of Polar Molecules



Tourque ที่เกิดในสนามไฟฟ้า

$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$

(มีทิศพยายามให้ $\vec{p}$ ขนานกับสนาม)

พิจารณางานที่ใช้สร้างระบบที่มี $\vec{p}$ ทำมุม θ กับ $\vec{E}$

① นำ $\vec{p}$ จาก ∞ มาในสนามโดยเคลื่อนที่มาในแนว $\perp \vec{E}$ (ไม่เกิดงาน เพราะ $\vec{p}\perp\vec{E}$)

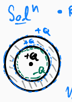
② หมุน $\vec{p}$ ให้ทำมุม θ กับสนาม ต้องออก τ ต้าน

$\tau_{ต้าน} = -pE\sin\theta$ (จาก $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$)

$\therefore W = \int_{\pi/2}^{\theta} \underbrace{-pE\sin\theta'}_{ccw}\underbrace{(-d\theta')}_{cw} = -pE\cos\theta'\Big|_{\pi/2}^{\theta} = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

พลังงานของ dipole ใน $\vec{E}$ $\quad W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

(ex) A positive point charge Q is at the center of a spherical dielectric shell of an inner radius R_i and an outer radius R_o. The dielectric constant of the shell is ε_r. Determine $\vec{E}$, V, $\vec{D}$ and $\vec{P}$.



Sol^n • $R \ge R_o$: $E_{R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (From Gauss' law)

$D_{R_1} = \varepsilon_0 E_{R_1} = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$P_{R_1} = 0$

$V_\infty = 0$: $V_{R_1} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

• $R_i < R < R_o$: $D_{R_2} = \frac{Q}{4\pi R^2}$ ($Q_f = Q$) , $E_{R_2} = \frac{D_{R_2}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}$

$P_{R_2} = D_{R_2} - \varepsilon_0 E = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2}$

$V_{R_2} = -\int_\infty^{R_o}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \int_{R_o}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}dR$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)/R_o + \frac{1}{\varepsilon_r R}\right]$

• $R < R_i$: $E_{R_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, $D_{R_3} = \frac{Q}{4\pi R^2}$, $P_{R_3} = 0$

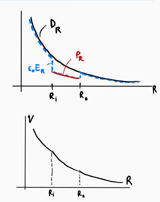
$V_{R_3} = -\int_\infty^{R_o}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dR - \int_{R_o}^{R_i}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}dR - \int_{R_i}^{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right) + \frac{1}{R}\right]$

$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}\vec{a}_R , & R_i < R < R_o \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R , & \text{otherwise} \end{cases}}$

$\boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{a}_R}$

$\boxed{\vec{P} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2}\vec{a}_R , & R_i < R < R_o \\ \vec{0} , & \text{otherwise} \end{cases}}$

$\boxed{V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} , & R > R_o \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\varepsilon_r R}\right\} , & R_i < R < R_o \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]\left[\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right] + \frac{1}{R}\right\} , & R < R_i \end{cases}}$



Types of Dielectrics

① **Linear** : $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$

② **Homogenoeus** — ε_r เหมือนกันทุกที่ในวัสดุ

③ **Isotropic** — ε_r ไม่ขึ้นกับทิศทางของ $\vec{E}$

Simple medium : linear, homogeneous, isotropic

④ **Anisotropic** — ε_r เปลี่ยนตามทิศทางของ $\vec{E}$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Crystals :

- Biaxial : $\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$
- Uniaxial : $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$
- Isotropic : $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$

(ex) A sphere of radius a carries a polarization $\vec{P}(R) = k\vec{R}$ where k is a constant and $\vec{R}$ is the vector from the center

(a) Calculate the bound charge ρ_{s_b} and ρ_{v_b}

(b) Find the field inside and outside the sphere.

Sol^n (a) $\rho_{s_b} = \vec{P}\cdot\vec{a}_n = \overbrace{(ka\vec{a}_R)}^{\text{surface อยู่ที่ } R=a}\cdot\vec{a}_R = \boxed{ka}$

$\rho_{s_a} = -\nabla\cdot\vec{P} = -\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 kR)\right) = \boxed{-3k}$

(b) พิจารณา Gauss' law : $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$

Inside (R<a) : $Q_{encl} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(-3k)R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi = -4\pi k R^3$

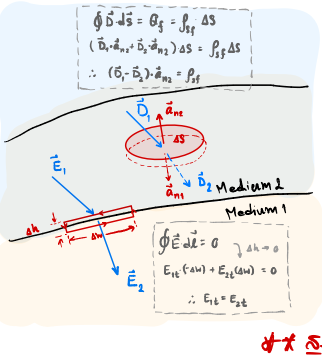
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_R(R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi) = E_R 4\pi R^2 \quad \therefore E_R = -kR/\varepsilon_0$

Outside (R<a) : $Q_{encl} = \int_v(-3k)\,dv + \int_s(ka)\,ds = -4\pi ka^3 + 4\pi ka^3 = 0$

$\therefore E_R = 0$

$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} -\frac{kR\vec{a}_R}{\varepsilon_0} ; & \text{inside a sphere} \\ \vec{0} ; & \text{outside a sphere} \end{cases}}$

Boundary Condition for Electrostatic Fields



Electrostatic boundary condition ที่ผิวรอยต่อวัสดุ

Conductor

$\vec{D}$ แนวตั้งฉากพุ่งออกจากผิวนอก

ภายนอก: $\vec{D}\cdot\vec{a}_n = \rho_s$ — "free" surface charge density

$\vec{E}$ แนวขนานกับผิว — $E_t = 0$

ภายใน: $\vec{D}_{inside} = \vec{0}$

Dielectric

$(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n})\cdot\vec{a}_{n2} = \rho_{sf}$ — surface charge density (free charge) (ที่มีอยู่ใน D_1)

$\vec{a}_{n2}$: unit vector ที่พุ่งออกจาก medium 2

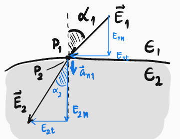
แนวขนานผิว: $E_{1t} = E_{2t}$

จาก $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ และ $\nabla\times\vec{E} = 0$ จะได้ว่า

$$\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \vec{P}_{1n} - \vec{P}_{2n}$$

** สรุป: $D_\perp$, $E_\parallel$, V ต่อเนื่องที่ผิว **

(ex) Two diectric media with permittivity ϵ_1 and ϵ_2 are separated by a charge-free boundary as shown in a figure. The electric field intensity in medium 1 at point P_1 has a magnitude E_1 and makes an angle α_1 with the normal. Determine the magnitude and direction of the electric field intensity at point P_2 in medium 2.



Sol^n พิจารณา Boundary condition

จาก $E_{1t} = E_{2t}$ จะได้ว่า

$$E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2 \quad —(1)$$

จาก $(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n})\cdot\vec{a}_{n2} = \rho_s$ และ $\rho_s = 0$ จะได้ว่า

$$D_1\cos\alpha_1 = D_2\cos\alpha_2$$
$$\epsilon_1 E_1\cos\alpha_1 = \epsilon_2 E_2\cos\alpha_2 \quad —(2)$$

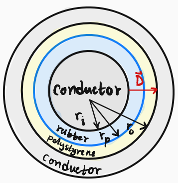
จาก (1), (2) $\therefore \dfrac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\tan\alpha_1\right)}$

ขนาดของ $\vec{E}_2$: $E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_1\sin\alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}E_1\cos\alpha_1\right)^2}$

$$\therefore \boxed{E_2 = E_1\left[\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\cos\alpha_1\right)^2\right]^{1/2}}$$

(ex) When a coaxial cable is used to carry electric power, the radius of the inner conductor is determined by the load current, and the overall size by the voltage and the type of the insulating material used. Assume that the radius of the inner conductor is 0.4 cm and the concentric layers of rubber ($\epsilon_{rr} = 3.2$) and the polystyrene ($\epsilon_{rp} = 2.6$) are used as insulating materials. Design a cable that is to work at a voltage rating of 20 kV. In order to avoid breakdown due to voltage surges caused by lightning and other abnormal external conditions, the maximum electric field intensities in the insulating materials are not to exceed 25% of the dielectric strength. (Dielectric strength of rubber and polystyrene are 25×10^6 V/m and 20×10^6 V/m respectively.)

Sol^n



หน้าตัดของสาย coaxial

จาก Gauss' law: พิจารณา long cylindrical conductor

$$\vec{D} = \frac{\rho_\ell}{2\pi r}\vec{a}_r \quad \therefore \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{a}_r$$

หา r ที่มีค่าสูงสุดที่ $\vec{E}$ ไม่เกิน 25% ของ diectric strength.

$$E_{rubber,max} = 0.25\times25\times10^6 \text{ V/m} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{3.2r_i}\right) \quad —(1)$$

$$E_{polystyrene,max} = 0.25\times20\times10^6 \text{ V/m} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2.6r_p}\right) \quad —(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $r_p = 1.54r_i = 1.54(0.4\text{ cm})$

$$\boxed{r_p = 0.616\text{ cm}}$$

ความต่างศักย์ระหว่างตัวนำด้านนอกกับด้านใน

$$-\int_{r_o}^{r_p}E_p\,dr - \int_{r_p}^{r_i}E_r\,dr = 20000\text{ V}$$

$$\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{rp}}\ln\left(\frac{r_o}{r_p}\right) + \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{rr}}\ln\left(\frac{r_p}{r_i}\right) = 20000\text{ V}$$

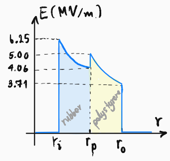
แทนค่า $r_i = 0.4$ cm, $r_p = 0.616$ cm และ

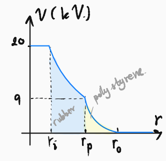
$$\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} = 0.25\times25\times10^6\times3.2\times r_i = 8\times10^4\text{ V} \quad \text{จะได้ว่า}$$

$$(8\times10^4)\left(\frac{1}{2.6}\ln\left(\frac{r_o}{0.616}\right) + \frac{1}{3.2}\ln(1.54)\right) = 20000$$

$$\therefore \boxed{r_o = 0.832\text{ cm}}$$

ออกแบบโดยให้ยางอยู่ด้านใน (ตั้งแต่ $r_i = 0.4$ cm ถึง $r_p = 0.616$ cm) และให้โพลีสไตรีนอยู่ด้านนอก (ตั้งแต่ $r_p = 0.616$ cm ถึง $r_o = 0.832$ cm)





Capacitance & Capacitors

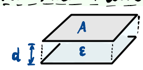
Capacitance (ความจุไฟฟ้า)

$$\boxed{C \equiv \frac{Q}{V}}$$

Q: ประจุที่สะสม [C]; V: ความต่างศักย์ [V]

[F]: Farad

Parallel Plate Capacitor

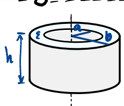


$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$\vec{D}_+ = \frac{Q}{2A}\vec{a}_n$, $\vec{D}_- = \frac{Q}{2A}\vec{a}_n$, $\therefore \vec{D} = \frac{Q}{A}\vec{a}_n$, $\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon A}\vec{a}_n$

$V = -\int_{(-)}^{(+)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Qd}{\varepsilon A}$, $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon A}{d}$

Cylindrical Capacitor

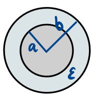


$$C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\frac{b}{a}}$$

$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi rh}\vec{a}_r$, $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rh}\vec{a}_r$

$V = -\int_{(-)}^{(+)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, $\therefore C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Spherical Capacitor



$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{a}_r$

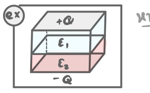
$-\int_{(-)}^{(+)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

$\therefore C = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$

• กรณีที่มี Dielectrics มากกว่า 1 ชนิด

ต้องใช้ Boundary Condition พิจารณา

① กรณี Dielectric ห่อประจุเท่ากัน



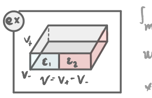
หา V:

$$V = -\int_{m_1}\frac{\vec{D}}{\varepsilon_1}\cdot d\vec{l} - \int_{m_2}\frac{\vec{D}}{\varepsilon_2}\cdot d\vec{l}$$

** $|\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n}| = |\rho_s|$ **

วงจรสมมูล อนุกรม: $\dfrac{1}{C_{tot}} = \sum_i \dfrac{1}{C_i}$

② กรณี Dielectric คร่อมศักย์เท่ากัน



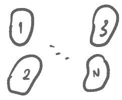
$$\int_{m_1}\varepsilon_1\vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{m_2}\varepsilon_2\vec{E}\cdot d\vec{s} = Q$$

หา V: $V = -\int_{-Q}^{+Q}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

** ขนานรอยต่อ: $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ **

วงจรสมมูล ขนาน: $C_{tot} = \sum_i C_i$

• Capacitances in multiconductor systems



พิจารณา Multiconductor system ที่มีตัวนำทั้งหมด N ตัว

Isolate system: $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_N = 0$

System equations:

$$Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \ldots c_{1N}V_N$$
$$Q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \ldots c_{2N}V_N$$
$$\vdots$$
$$Q_N = c_{N1}V_1 + c_{N2}V_2 + \ldots + c_{11}V_N$$

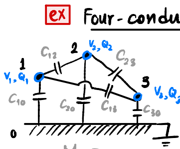
c_{ii} คือ coefficients of capacitance

เป็นบวก — $c_{ii} = \frac{Q_i}{V_i}$ — เทียบกับ ground.

c_{ij} คือ coefficients of induction

มีค่าเป็นลบ: ประจุเหนี่ยวนำ Q_j จะเป็นลบ แต่ V_i เป็นบวก

ex Four-conductor system



จาก รูปจะได้สมการ

$$Q_1 = C_{10}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3)$$
$$Q_2 = C_{20}V_2 + C_{12}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3)$$
$$Q_3 = C_{30}V_3 + C_{13}(V_3 - V_1) + C_{23}(V_3 - V_2)$$

Self capacitance; Mutual

จัดรูปต่อเนื่อง:

$$Q_1 = (C_{10} + C_{12} + C_{13})V_1 - C_{12}V_2 - C_{13}V_3$$
$$Q_2 = -C_{12}V_1 + (C_{20} + C_{12} + C_{23})V_2 - C_{23}V_3$$
$$Q_3 = -C_{13}V_3 - C_{23}V_2 + (C_{30} + C_{13} + C_{23})V_3 \quad —(*)$$

จาก system of equations

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

Coefficient of capacitances:

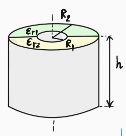
$$c_{11} = C_{10} + C_{12} + C_{13}$$
$$c_{22} = C_{20} + C_{12} + C_{23}$$
$$c_{33} = C_{30} + C_{13} + C_{23}$$

Coefficient of induction:

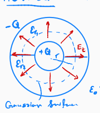
$$c_{12} = c_{21} = -C_{12}$$
$$c_{23} = c_{32} = -C_{23}$$
$$c_{13} = c_{31} = -C_{13}$$

(ex) จงหาความจุของตัวเก็บประจุต่อไปนี้

(1)



Method i: สมมติว่ามีประจุ Q



รอบๆตัวนำ Gauss' law:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{encl} \qquad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_t(\pi rh) + \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_t(\pi rh) = Q$$

$$E_t = \frac{Q}{\pi rh\,\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}$$

$$V = -\int_{R_2}^{R_1}E_t\,dr = \frac{Q}{\pi h\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})h}{\ln(R_2/R_1)}}$$

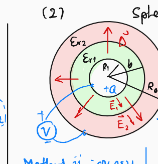
Method ii:

วงจรสมมูลแบบขนาน: Half Cylindrical Capacitor

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}h}{\ln(R_2/R_1)} + \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}h}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\therefore \boxed{C = \frac{\pi\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})h}{\ln(R_2/R_1)}}$$

(2) Spherical Capacitor



Method i Gauss' law: $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{a}_R$

จาก Boundary Condition: $D_{1n} = D_{2n}$ (ไม่มีประจุที่รอยต่อ)

จะได้ว่า

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R^2}\vec{a}_R, \quad \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R^2}\vec{a}_R$$

$$V = -\int_{R_o}^{R_i}\vec{E}\cdot d\vec{R} = -\int_{R_o}^{b}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R^2}dR - \int_{b}^{R_i}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R^2}dR$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R_o}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_i} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{1}{b} - \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_o}}}$$

Method ii: อนุกรม

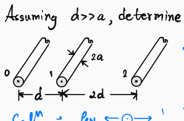
$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{b}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} + \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{R_o}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\cdot\frac{1}{R_i} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{1}{b} - \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_o}\right]$$

$$\therefore \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_i} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{1}{b} - \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_o}}}$$

** พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ: $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}$ **

(ex) Three horizontal parallel conducting wires, each of radius a and isolated from the ground, are separated from one another as shown in a figure. Assuming d>>a, determine the partial capacitances per unit length between the wires.



Sol^n $\vec{E} = \frac{\rho_{\ell N}}{2\pi\varepsilon_0 r_N}$

จาก $V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}$

ให้ line #0 เป็นจุดอ้างอิง

$$V_{10} = -\int_d^a\left(-\frac{\rho_{\ell 0}}{2\pi\varepsilon_0 r}dr\right) - \int_d^a\left(\frac{\rho_{\ell 1}}{2\pi\varepsilon_0 r}dr\right) - \int_{3d}^{2d}\left(\frac{\rho_{\ell 2}}{2\pi\varepsilon_0 r}dr\right)$$

($\vec{E}$ จาก 0, $\vec{E}$ จาก 1, $\vec{E}$ จาก 2)

จะได้ว่า $V_{10} = \frac{\rho_{\ell 0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d} + \frac{\rho_{\ell 1}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a} + \frac{\rho_{\ell 2}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{3d}{2d}$

$$2\pi\varepsilon_0 V_{10} = \rho_{\ell 0}\ln\frac{a}{d} + \rho_{\ell 1}\ln\frac{d}{a} + \rho_{\ell 2}\ln\frac{3}{2} \quad —(1)$$

ทำนองเดียวกัน

$$2\pi\varepsilon_0 V_{20} = \rho_{\ell 0}\ln\frac{a}{3d} + \rho_{\ell 1}\ln\frac{d}{2d} + \rho_{\ell 2}\ln\frac{3d}{a} \quad —(2)$$

• isolate system:

$$\rho_{\ell 0} + \rho_{\ell 1} + \rho_{\ell 2} = 0 \Rightarrow \rho_{\ell 0} = -(\rho_{\ell 1} + \rho_{\ell 2}) \quad —(3)$$

แทน (3) ใน (2) จะได้ว่า

$$2\pi\varepsilon_0 V_{10} = 2\rho_{\ell 1}\ln\frac{d}{a} + \rho_{\ell 2}\ln\frac{3d}{2a} \quad —(4)$$

$$2\pi\varepsilon_0 V_{20} = \rho_{\ell 1}\ln\frac{3d}{2a} + 2\rho_{\ell 2}\ln\frac{3d}{a} \quad —(5)$$

จาก (5) และ (6) จะได้ว่า

$$\rho_{\ell 1} = \alpha\left(V_{10}\,2\ln\frac{3d}{a} - V_{20}\ln\frac{3d}{a}\right)$$

$$\rho_{\ell 2} = \alpha\left(-V_{10}\ln\frac{3d}{2a} + V_{20}\,2\ln\frac{d}{a}\right)$$

เมื่อ $\alpha = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{4\ln\frac{d}{a}\ln\frac{3d}{a} - \left(\ln\frac{3d}{2a}\right)^2}$

จาก $Q = \rho_\ell\cdot l$ ดังนั้น Capacitance per unit length

$$\boxed{\begin{aligned} C_{12} &= \alpha\ln\frac{3d}{2a} \\ C_{10} &= \alpha\left(2\ln\frac{3d}{a} - \ln\frac{3d}{2a}\right) \\ C_{20} &= \alpha\left(2\ln\frac{d}{a} - \ln\frac{3d}{2a}\right) \end{aligned}}$$

เทียบกับ system Equations

• Electrostatics forces of an isolated system of bodies.

↳ ใช้ Principle of virtual displacement → สมมติว่าประจุเคลื่อนไปด้วยระยะทางเล็กๆ แล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างงาน (พลังงานที่เปลี่ยนแปลง) กับแรง

(1) System of bodies with fixed charge.

(ประจุคงที่ ไม่มีพลังงานเข้ามาในระบบ ↔ ระบบทำงานเอง)

- งานที่ระบบทำให้ประจุขยับ: $dW_{sys} = F_Q \cdot dl$
- งานเกิดจากการลดลงของพลังงานในระบบ: $dW_{sys} = -dW_e$

Fixed Q $\boxed{F_Q = -\nabla W_e}$ $dW_e = \nabla W_e \cdot d\vec{l}$

(2) System of bodies with fixed potential

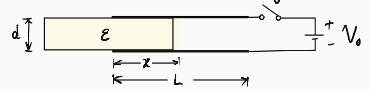
(แรงดันคงที่ → มีการรับพลังงานจากภายนอกระบบ)

- พลังงานเปลี่ยนแปลงจากการรับประจุเข้ามา : $dW_{supplied} = V\,dQ$
- พลังงานของระบบ $W_e = \frac{1}{2}QV \Rightarrow dW_e = \frac{1}{2}V\,dQ = \frac{1}{2}dW_{supplied}$
- กฎอนุรักษ์พลังงาน $dW_{supplied} = dW_e + dW$ Mechanical work $dW = F_V \cdot dl$

$2dW_e = dW_e + F_V \cdot dl$

$\boxed{\vec{F}_V = \nabla W_e}$ Fixed V

(ex) A parallel-plate capacitor of width w, length L, and separation d has a solid dielectric slab of permittivity ε in the space between the plates. The capacitor is charged to a voltage V_0 by a battery, as shown in a figure. Assuming that the dielectric slab is withdrawn by the position shown, determine the force acting on the slab



(a) with a switch closed,
(b) after the switch is first opened.

Sol^n เมื่อ dielectric slab อยู่ที่ตำแหน่ง x : เป็นวงจรสมมูลแบบขนาน

$$C = \frac{\varepsilon x w}{d} + \frac{\varepsilon_0 (L-x) w}{d} = \left(\frac{\varepsilon_0 L + (\varepsilon-\varepsilon_0)x}{d}\right) w$$

(a) Closed switch ⇒ $V = V_0$ (constant)

พลังงานสะสม $W_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 L + (\varepsilon-\varepsilon_0)x}{d} w V_0^2$

Fixed V : $F_{V_x} = \frac{\partial}{\partial x} W_e = \frac{V_0^2 w}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0)$

(b) Opened switch ⇒ $Q = CV_0$ (constant)

พลังงานสะสม $W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{(\varepsilon_0 L + (\varepsilon-\varepsilon_0)x)w}$

Fixed Q : $F_{Q_x} = -\frac{\partial}{\partial x}W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{w}\frac{1}{(\varepsilon_0 L + (\varepsilon-\varepsilon_0)x)^2}\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0)$

$$\boxed{F_{Q_x} = \frac{V_0^2 w}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0)}$$

▶ Solution of electrostatic problems

• Poisson & Laplace Equation

Laplacian : $\nabla^2 \equiv \nabla\cdot(\nabla\square)$

$$\nabla^2 V = \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \text{(Cartesian)} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \text{(Cylindrical)} \\ \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} & \text{(spherical)} \end{cases}$$

จาก $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$ และ $\vec{E} = -\nabla V$ } $\nabla\cdot(\nabla V) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$ → $\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$ (Poisson Eq.) $\xrightarrow[\text{ที่ไม่มีประจุ}]{\text{ในบริเวณ}}$ $\boxed{\nabla^2 V = 0}$ (Laplace Eq.)

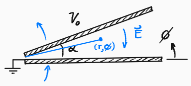
** โดยปกติจะใช้ Laplace Eq. กับบริเวณที่ไม่มีประจุโดยใช้ Boundary Condition มาแก้ **

Steps:

- พิจารณา $\vec{E}$ และ $\vec{D}$ เพื่อหา coordinates ที่เหมาะสม
- ε คงที่หรือไม่
  - ใช่ → หา V จาก $\nabla^2 V = 0$ → พิจารณา Boundary Condition เพื่อหาค่าคงที่ใน V
  - ไม่ใช่ →
    - หลายวัสดุ → แยกคิด $\nabla^2 V = 0$ ในแต่ละวัสดุ → $\vec{E} = -\nabla V$ → ใช้ Boundary Condition จากโจทย์และที่ผิวรอยต่อ
    - ε เป็นฟังก์ชัน → หา V จาก $\nabla\cdot(\varepsilon\nabla V) = 0$ → หาค่าคงที่ใน V จาก ε

Uniqueness Theorem : คำตอบของ Poisson (+Laplace) Eq. มีเพียงอันเดียวสำหรับ Boundary Condition หนึ่งๆ

(ex) Two infinite insulated conducting planes maintain at potentials 0 and V_0 form a wedge-shaped configuration, as shown in a figure. Determine the potential distributions and the electric field everywhere.



Sol^n บริเวณระหว่างแผ่นตัวนำไม่มีประจุ : $\nabla^2 V = 0$

สนามไฟฟ้าต้องตั้งฉากกับผิว คือมีเฉพาะแนว $\vec{a}_\phi$

นั่นคือ $\vec{E} = E(\phi)\,\vec{a}_\phi \rightsquigarrow V = V(\phi)$

นั่นคือ $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$

จะได้ว่า $V = A\phi + B$

กรณี $0 < \phi < \alpha$: $V(0) = 0$ และ $V(\alpha) = V_0$

∴ $V(\phi) = \frac{V_0\phi}{\alpha}$

$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\phi}\vec{a}_\phi$

$\vec{E} = -\frac{V_0}{r\alpha}\vec{a}_\phi$

กรณี $\alpha < \phi < 2\pi$

$V(\alpha) = V_0$, $V(2\pi) = 0$ } $V(\phi) = \frac{V_0\phi}{\alpha - 2\pi} - \frac{2\pi V_0}{\alpha - 2\pi}$

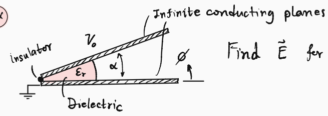
∴ $V(\phi) = \frac{V_0}{2\pi-\alpha}(2\pi - \phi)$

$\vec{E} = -\nabla V = \frac{V_0}{r(2\pi-\alpha)}\vec{a}_\phi$

$$\boxed{V = \begin{cases} \frac{V_0\phi}{\alpha}, & 0 < \phi < \alpha \\ \frac{V_0}{2\pi-\alpha}(2\pi-\phi), & \alpha < \phi < 2\pi \end{cases}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} -\frac{V_0}{r\alpha}\vec{a}_\phi, & 0 < \phi < \alpha \\ \frac{V_0}{r(2\pi-\alpha)}\vec{a}_\phi, & \alpha < \phi < 2\pi \end{cases}}$$

(ex) Find $\vec{E}$ for the region $0 < \phi < \alpha$



Sol^n พิจารณา $\vec{E}$ เฉพาะในทิศ $\vec{a}_\phi \Rightarrow V = V(\phi)$

$\nabla^2 V(\phi) = 0 \longrightarrow V = A\phi + B$

- พิจารณาบริเวณที่เป็น free space : $V_1 = A_1\phi + B_1$

$V_1(0) = 0$, $V_1(\alpha) = V_0$ } $V_1 = \frac{V_0\phi}{\alpha} \xrightarrow{\vec{E} = -\nabla V} \vec{E}_1 = -\frac{V_0}{r\alpha}\vec{a}_\phi$

บริเวณที่เป็น dielectric : $V_2 = A_2\phi + B_2$

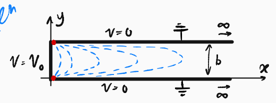
$V_2(0) = 0$, $V_2(\alpha) = V_0$ } $V_1 = \frac{V_0\phi}{\alpha} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{V_0}{r\alpha}\vec{a}_\phi$

∴ $\boxed{\vec{E} = -\frac{V_0}{r\alpha}\vec{a}_\phi}$ ($E_{1t} = E_{2t}$)

* สังเกตว่า $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ เพราะ Boundary Condition แต่ $\vec{D}_1 = \varepsilon_0\vec{E} \neq \vec{D}_2 = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$ เพราะประจุที่ผิวตัวนำไม่เท่ากัน

(ex) Two grounded, semi-infinite, parallel-plane electrodes are separated by a distance b. A third electrode perpendicular to and insulated from both is maintained at a constant potential V_0. Determine the potential distribution in the region enclosed by the electrodes

Sol^n



Boundary conditions :

V ไม่ขึ้นกับ z ; $V = V(x,y)$

$V(0,y) = V_0$, $V(x\to\infty, y) = 0$

$V(x,0) = V(x,b) = 0$

พิจารณา $\nabla^2 V = 0$: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

ให้ $V = X(x)Y(y)$ จะได้

$Y(y)\frac{d^2X}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$

หรือ $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \text{constant}$ — (*)

จาก (*) และพิจารณา Boundary Condition

ให้ constant $= +k^2$ จะได้

$X(x) = Ae^{kx} + Be^{kx}$, $Y(y) = C\cos ky + D\sin ky$

นั่นคือ $V(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\cos(ky) + D\sin(ky))$

- $x\to\infty$, $V=0$: $A = 0$
- $V(x,0) = 0$: $C = 0$
- $V(x,b) = 0$: $\sin(kb) = 0 \longrightarrow k = \frac{n\pi}{b}$ $(n = 1,2,3,\dots)$

นั่นคือ

$V(x,y) = BDe^{-kx}\sin(ky)$

$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-\frac{n\pi x}{b}}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

พิจารณา $V(0,y) = V_0$ จะได้ว่า

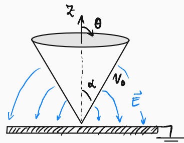
$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$, $0 < y < b$

Fourier series ใน $0 < y < b$ จะได้ว่า

$$\alpha_n = \frac{2}{b}\int_0^b V_0\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy = \frac{2}{b}\left(\frac{V_0 b}{n\pi}\right)\left(-\cos\frac{n\pi y}{b}\Big|_0^b\right) = \frac{4V_0}{n\pi}$$

$$\therefore \boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi x}{b}}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}$$

(ex) An infinite conducting cone of half-angle α is maintained at potential V_0 and isulated from a grounded conducting plane, as shown in a figure. Determine



(a) the potential distribution $V(\theta)$ in the region $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$
(b) the electric field density in the region $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$
(c) the charge densities on the cone surface and plane.

Sol^n $\nabla^2 V(\theta) = 0$

$\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0$

$\sin\theta\cdot\frac{\partial V}{\partial\theta} = A$ (constant)

$V = \int A\,\mathrm{cosec}\,\theta\,d\theta$

$V(\theta) = -A\ln|\mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta| + B$

$V(\theta) = A\ln|\tan\frac{\theta}{2}| + B$

พิจารณา $V(\frac{\pi}{2}) = 0$ ได้ $B = 0$

$V(\alpha) = V_0$: $A = \frac{V_0}{\ln(\tan\frac{\alpha}{2})}$

$$\therefore \boxed{V(\theta) = V_0\frac{\ln(\tan\frac{\theta}{2})}{\ln(\tan\frac{\alpha}{2})}}$$

$\vec{E} = -\nabla V$

$\vec{E} = -\frac{1}{R}\frac{d}{d\theta}\left\{V_0\frac{\ln(\tan\frac{\theta}{2})}{\ln(\tan\frac{\alpha}{2})}\right\}\vec{a}_\theta$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = -\frac{V_0}{R\sin\theta\ln(\tan\frac{\alpha}{2})}\vec{a}_\theta}$$

สำหรับ conductor

$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\vec{a}_n$

$\rho_s = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{a}_n$

Cone : $\theta = \alpha$, $\vec{a}_n = -\vec{a}_\theta$

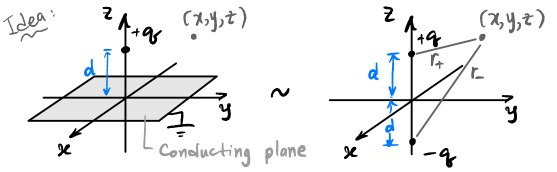
$$\therefore \boxed{\rho_{s_{cone}} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{2}}}$$

Plane : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{a}_n = \vec{a}_\theta$

$$\therefore \boxed{\rho_{s_{plane}} = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{R\tan\frac{\alpha}{2}}}$$

• The method of images

Idea:

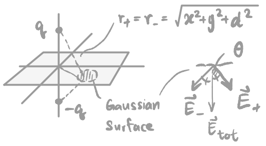


$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

** เฉพาะบริเวณ z >> d เท่านั้น (สำหรับ conducting plane) **

ยืนยันได้ด้วย Boundary Condition และ Uniqueness theorem

หา induced charge บน plane



$r_+ = r_- = \sqrt{x^2+y^2+d^2}$

$$\vec{E}_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_+^2}+\frac{q}{r_-^2}\right]\cos\theta\,(-\vec{a}_z)$$

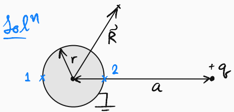
$$\vec{E}_{tot} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}\right]\vec{a}_z$$

Gauss' law : $\rho_s = \varepsilon_0\vec{E}_{tot}\cdot\vec{a}_n = \varepsilon_0\vec{E}_{tot}\cdot(-\vec{a}_z)$

$$\therefore \rho_s(x,y) = \frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \quad \text{(induced charge)}$$

(ex) A point charge q is situated a distance a from the center of a grounded conducting sphere of radius r $(a>r)$. Find the potential outside the sphere and the induced surface charge on the sphere.

Sol^n



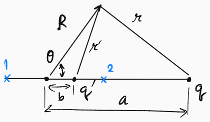
พิจารณา image charge q' ซึ่งทำให้ $V_1 = V_2 = 0$

$V_1 : \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r+a}+\frac{q'}{r+b}\right] = 0 \rightsquigarrow (r+a)q' = -(r+b)q$ —(1)

$V_2 : \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a-r}+\frac{q'}{r-b}\right] = 0 \rightsquigarrow (a-r)q' = -(r-b)q$ —(2)

(1)+(2) : $2aq' = -2rq$ | แทน q' ใน (1): $r^2 a = ar + ab$

$\therefore q' = -\frac{r}{a}q$ | $\therefore b = \frac{r^2}{a}$



$\therefore V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\mathscr{r}}+\frac{q'}{\mathscr{r}'}\right]$, $\mathscr{r} = \sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}$, $\mathscr{r}' = \sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\theta}$

$$V(R,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}} - \frac{(r/a)q}{\left(R^2+\left(\frac{r^2}{a}\right)^2-2\left(\frac{r^2}{a}\right)R\cos\theta\right)^{1/2}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{q}{\left(\frac{a^2R^2}{r^2}+r^2-2aR\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

$$\therefore \boxed{V(R,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+(aR/r)^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}}\right]}$$

พิจารณา $\rho_{s\,induced} = -\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial R}\Big|_{R=r}$; ทิศทางตั้งฉากในแนว $\vec{a}_R$ (มาจาก $\rho_s = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{a}_n = -\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial n}$)

$$\rho_{s\,induced} = -\frac{q}{4\pi}\left\{\left[-\frac{1}{2}(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{-3/2}(2R-2a\cos\theta)\right] + \frac{1}{2}\left(r^2+\left(\frac{aR}{r}\right)^2-2Ra\cos\theta\right)^{-3/2}\left(\frac{2a^2R}{r^2}-2a\cos\theta\right)\right\}\Bigg|_{R=r}$$

$$= \frac{q}{4\pi}\left\{(r^2+a^2-2ra\cos\theta)^{-3/2}(r-a\cos\theta) - (r^2+a^2-2ra\cos\theta)^{-3/2}\left(\frac{a^2}{r}-a\cos\theta\right)\right\}$$

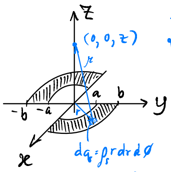
$$\therefore \boxed{\rho_{s\,induced} = \frac{-q}{4\pi r}(a^2-r^2)(r^2+a^2-2ra\cos\theta)^{-3/2}}$$

Additional Problems

① แผ่นประจุ 2 แผ่นมีความหนาแน่นประจุต่อพื้นที่ $\rho_s = r^{-1}$ C/m² วางตัวในตำแหน่งดังนี้
- แผ่นที่หนึ่ง อยู่ที่ $a<r<b$ [m], $0<\phi<0.5\pi$ [rad], $z=0$ [m]
- แผ่นที่สอง อยู่ที่ $a<r<b$ [m], $\pi<\phi<1.5\pi$ [rad], $z=0$ [m]

จงหา $V(0,0,z)$, $\vec{E}(0,0,z)$ ใน Cartesian Coordinates เมื่อ $V=0$ อยู่ที่อนันต์

Sol^n



พิจารณา ศักย์ไฟฟ้าที่ (0,0,z) จากประจุเล็กๆ dq ตัวรูป โดยใช้ cylindrical coordinates :

$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\mathscr{r}}$ V.

$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_s r\,dr\,d\phi}{\sqrt{r^2+z^2}}$ V.

จะได้ว่า $V(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{0.5\pi}\int_a^b\frac{(r^{-1})r\,dr\,d\phi}{\sqrt{r^2+z^2}} + \int_\pi^{1.5\pi}\int_a^b\frac{(r^{-1})r\,dr\,d\phi}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]$ V.

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{0.5\pi}d\phi\int_a^b\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}dr + \int_\pi^{1.5\pi}d\phi\int_a^b\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}dr\right]$ V.

$\boxed{V(0,0,z) = \frac{1}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2+z^2}}{a+\sqrt{a^2+z^2}}\right)}$ V. (ซึ่งใน z เท่ากัน : $z_{(Cartesian)} = z_{(cylindrical)}$)

พิจารณา $\vec{E} = -\nabla V$

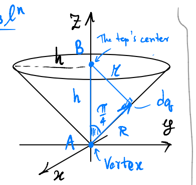
$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2+z^2}}{a+\sqrt{a^2+z^2}}\right)\right\}\vec{a}_z$ V/m

$= -\frac{1}{4\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{b+\sqrt{b^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{a+\sqrt{a^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right\}\vec{a}_z$ V/m

$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{z}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a^2+z^2+a\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{b^2+z^2+b\sqrt{b^2+z^2}}\right]\vec{a}_z \text{ V/m.}}$

② A conical surface carries a uniform surface charge ρ_s. The height of the cone is h, as is a radius of the top. Find the potential difference between the vertex and the center of the top of this cone.

Sol^n



ใช้ spherical coordinates

กำหนด $dq = \rho_s R\sin\frac{\pi}{4}\,dR\,d\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_s R\,dR\,d\phi$

$\mathscr{r} = \sqrt{R^2+h^2-2Rh\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{R^2+h^2-\sqrt{2}Rh}$

ที่ A (Vertex) ; $dV_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R}$

$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}h}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_s R\,dR\,d\phi}{R} = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}$ —(*)

ที่ B : $dV_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\mathscr{r}}$

$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}h}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_s R\,dR\,d\phi}{\sqrt{R^2+h^2-\sqrt{2}Rh}}$

$= \frac{\rho_s}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\int_0^{\sqrt{2}h}\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2-\sqrt{2}Rh}}dR$

$= \frac{\rho_s}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\left[\left(h+\frac{h}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{h}{\sqrt{2}}+h\right)\right)-\left(h+\frac{h}{\sqrt{2}}\ln\left(h-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$

$V_B = \frac{\rho_s}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\ln(\sqrt{2}+1)$ —(**)

$u = \sqrt{R^2+h^2-\sqrt{2}hR} \Rightarrow du = \frac{2R-\sqrt{2}h}{2\sqrt{(\dots)}}dR = \left[\frac{R}{\sqrt{\dots}}-\frac{h}{\sqrt{2}}\frac{1}{u}\right]dR$

$\int\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2-\sqrt{2}Rh}}dR = \int\left(\frac{R}{\sqrt{\dots}}-\frac{h}{\sqrt{2}u}+\frac{h}{\sqrt{2}u}\right)dR$

$= \int du + \frac{h}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2-\sqrt{2}Rh}}dR$

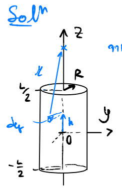
$= \sqrt{\dots} + \frac{h}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(R-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}}dR = \left[\sqrt{\dots}+\frac{h}{\sqrt{2}}\ln\left(R-\frac{h}{\sqrt{2}}+\dots\right)\right]$

$\therefore \boxed{V_A - V_B = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\left[1-\ln(\sqrt{2}+1)\right]}$

$\simeq 0.1186$

③ Find the potential on the axis of a uniformly charged solid cylinder a distance z from center. The length of cylinder is L, its radius is R, and the charge density is ρ_v. Then calculate the electric field at this point. (Assume that $z>\frac{L}{2}$)

Sol^n



ใช้ Cylindrical Coordinates (r,ϕ,h)

กำหนด $dq = \rho_v r\,dr\,d\phi\,dh$, $\mathscr{r} = \sqrt{r^2+(z-h)^2}$; $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\mathscr{r}}$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\rho_v r\,dr\,d\phi\,dh}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$

$= \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\sqrt{r^2+(z-h)^2}\Big|_0^R dh$

$= \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\sqrt{R^2+(z-h)^2}+h-z\right)dh$

ใช้ตรีโกณมิติในการ ⟹ $\int R^2\sec^3\theta\,d\theta$; $\frac{1}{2}R^2(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|)$

$V = \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2}\left\{(z-h)\sqrt{R^2+(z-h)^2}+R^2\ln\left|\frac{\sqrt{R^2+(z-h)^2}+(z-h)}{R}\right|\right\}+\left(\frac{h^2}{2}-zh\right)\right]_{h=-\frac{L}{2}}^{h=\frac{L}{2}}$

$\boxed{V = \frac{\rho_v}{4\varepsilon_0}\left\{\left(z+\frac{L}{2}\right)\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}-\left(z-\frac{L}{2}\right)\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}+R^2\ln\left(\frac{z+\frac{L}{2}+\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}{z-\frac{L}{2}+\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}\right)-2Lz\right\}}$

$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial z}V\,\vec{a}_z$

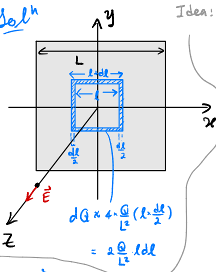
$= -\frac{\rho_v\vec{a}_z}{4\varepsilon_0}\left\{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}+\frac{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}-\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}-\frac{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}+R^2\left[\frac{1+\frac{\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}}{z+\frac{L}{2}+\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}-\frac{1+\frac{\left(z-\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}}{z-\frac{L}{2}+\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}\right]-2L\right\}$

$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\left[L+\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}-\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}\right]\vec{a}_z}$

④ A charge Q is distributed uniformly over $L\times L$ square plate. Determine $\vec{E}$ at a point on the axis perpendicular to the plate and through its center

Sol^n

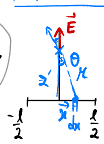
Idea: หาสนามจากกรอบสี่เหลี่ยมก่อน (เนื่องจาก $\vec{E}$ เหลือแต่แนว $\vec{a}_z$ และทำให้สมมาตรทุกด้าน)



$dQ \times 4 = \frac{Q}{L^2}(\ell\cdot 2d\ell)$

$= \frac{2Q}{L^2}\ell\,d\ell$

แผ่นลวดด้านของสี่เหลี่ยม



$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{\mathscr{r}^2}\cos\theta$

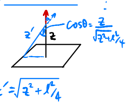
$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{(q'/\ell)\,dx}{z'^2+x^2}\cdot\frac{z'}{\sqrt{z'^2+x^2}}$

$= \frac{q'z'}{4\pi\varepsilon_0\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{1}{(z'^2+x^2)^{3/2}}dx$

$= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\ell}\left\{\frac{x}{z'\sqrt{x^2+z'^2}}\right\}\Bigg|_{x=-\frac{\ell}{2}}^{x=\frac{\ell}{2}}$

$E_{1side} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 z'\sqrt{z'^2+\ell^2/4}}$

รวม 4 ด้าน



: $E_{square\,loop} = \frac{(4\times q')\to dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+\frac{\ell^2}{4}}\sqrt{\left(z^2+\frac{\ell^2}{4}\right)+\ell^2/4}}\times\frac{z}{\sqrt{z^2+\ell^2/4}}$

$\therefore E_{square\,loop} = \frac{zQ\ell\,d\ell}{2\pi\varepsilon_0 L^2(z^2+\ell^2/4)\sqrt{z^2+\ell^2/2}}$

สนามจากทั้งแผ่น

$E = \int_{\ell=0}^{\ell=L}\frac{zQ\ell\,d\ell}{2\pi\varepsilon_0 L^2(z^2+\ell^2/4)\sqrt{z^2+\ell^2/2}}$

$= \frac{zQ}{2\pi\varepsilon_0 L^2}\int_{\ell=0}^{L}\frac{\ell}{(z^2+\ell^2/4)\sqrt{z^2+\ell^2/2}}d\ell$

พิจารณา $u = \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\ell\,d\ell \to \ell\,d\ell = 2du$

$\int\frac{\ell\,d\ell}{(z^2+\ell^2/4)\sqrt{z^2+\ell^2/2}} = \int 2\cdot\frac{1}{(z^2+u)\sqrt{z^2+2u}}du$; $v = \sqrt{z^2+2u}$, $dv = \frac{1}{\sqrt{z^2+2u}}du$, $u = \frac{v^2-z^2}{2}$

$= \int\frac{4\,dv}{v^2+z^2} = \frac{4}{z}\arctan\left(\frac{v}{z}\right)$

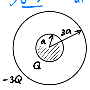
$= \frac{4}{z}\arctan\frac{\sqrt{z^2+\ell^2/2}}{z}$

$E = \frac{zQ}{2\pi\varepsilon_0 L^2}\left[\frac{4}{z}\arctan\frac{\sqrt{z^2+\ell^2/2}}{z}\right]_{\ell=0}^{\ell=L}$

$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{2Q}{\pi\varepsilon_0 L^2}\left\{\arctan\left(\sqrt{1+\frac{L^2}{2z^2}}\right)-\frac{\pi}{4}\right\}\vec{a}_z}$

⑤ จงพิจารณาทรงกลมมีความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตร $\rho_v = 1-\left(\frac{R}{a}\right)^2$ [C/m³] กระจายอยู่ทั่วในบริเวณ $0<R<a$ [m] เมื่อนำตัวนำทรงกลมรัศมี $R=3a$ [m] มาห่อรอบฉนวนทรงกลมโดยให้มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน และปล่อยประจุ $-3Q$ ที่ตัวนำ (ฉนวนมีประจุทั้งหมด Q) จงคำนวณหา สนามไฟฟ้า และ ศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่งต่างๆ

Sol^n



หา Q : $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a\left(1-\frac{R^2}{a^2}\right)R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi$ [C]

$Q = 4\pi\left[\frac{R^3}{3}-\frac{R^5}{5a^2}\right]_{R=0}^{R=a}$ [C]

$\therefore Q = \frac{8\pi a^3}{15}$ [C]

พิจารณา Q_{encl} ที่ถูกล้อมด้วย spherical Gaussian surface :

$Q_{encl} = \begin{cases}4\pi\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^5}{5a^2}\right) \text{ [C]}, & 0<R<a \text{ [m]}\\ \frac{8\pi}{15}a^3 \text{ [C]}, & a<R<3a \text{ [m]}\\ -\frac{16\pi}{15}a^3 \text{ [C]}, & R>3a \text{ [m]}\end{cases}$

$Q_{encl} = Q + (-3Q) = -2Q$

Gauss' law : $\oint\vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{encl}$

ซึ่งคือ ในกรณีนี้ : $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{encl}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R$ [V/m]

$\therefore \boxed{\vec{E}(R) = \begin{cases}\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{3}-\frac{R^3}{5a^2}\right)\vec{a}_R \text{ [V/m]}, & 0<R<a \text{ [m]}\\ \frac{2a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R \text{ [V/m]}, & a<R<3a \text{ [m]}\\ -\frac{4a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R \text{ [V/m]}, & R>3a \text{ [m]}\end{cases}}$

$R>3a$: $V(R) = -\int_\infty^R\left(-\frac{4a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\right)dR$

$V(R) = -\frac{4a^3}{15\varepsilon_0 R}$ [V]

$a<R<3a$:

$V(R) = -\int_\infty^{3a}\left(-\frac{4a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\right)dR - \int_{3a}^R\left(\frac{2a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\right)dR$

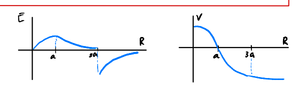
$= -\frac{4a^2}{45\varepsilon_0}+\frac{2a^3}{15\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{3a}\right] = \frac{2a^3}{15\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right]$ [V]

$0\le R<a$:

$V(R) = -\int_\infty^{3a}\left(-\frac{4a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\right)dR - \int_{3a}^{a}\left(\frac{2a^3}{15\varepsilon_0 R^2}\right)dR - \int_a^R\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{3}-\frac{R^3}{5a^2}\right)dR$

$= \frac{1}{60\varepsilon_0}\left(\frac{3R^4}{a^2}-10R^2+7a^2\right)$ [V]

$\boxed{V(R) = \begin{cases}\frac{1}{60\varepsilon_0}\left(\frac{3R^4}{a^2}-10R^2+7a^2\right) \text{ [V]}, & 0<R<a\\ \frac{2a^3}{15\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right) \text{ [V]}, & a<R<3a\\ -\frac{4a^3}{15\varepsilon_0 R} \text{ [V]}, & R>3a\end{cases}}$



⑥ ระบบหนึ่งอยู่ในอากาศว่าง (free space) ประกอบด้วย แผ่นประจุใหญ่อนันต์ 3 แผ่น วางตัวขนานกับระนาบ yz โดยที่

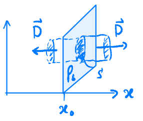
- แผ่นที่ 1 มีความหนาแน่นประจุ $-4\ nC/m^2$ วางตัวอยู่ที่ $x = 1$ m.
- แผ่นที่ 2 มีความหนาแน่นประจุ $1\ nC/m^2$ วางตัวอยู่ที่ $x = -1$ m.
- แผ่นที่ 3 มีความหนาแน่นประจุ $3\ nC/m^2$ วางตัวอยู่ที่ $x = -3$ m.

กำหนดให้ $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m จงหา

(i) Electric field intensity ที่ (5,2,9) และ (0,4,0) (Cartesian coordinates)

(ii) งานที่ต้องใช้ในการลากประจุขนานกับ yz จาก $x = 10$ m. ไป $x = 20$ m.

Sol^n หา $\vec{D}$ จากประจุแผ่นใหญ่อนันต์ความหนาแน่นประจุ ρ_s



Gauss' law : $\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}$

$2DS = \rho_s S$

$D = \frac{\rho_s}{2}$ (ค่าที่)

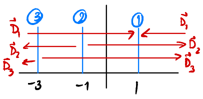
สรุป จะได้ว่า $\vec{D}(x) = \begin{cases} -\frac{\rho_s}{2}\vec{a}_x, & x < x_0 \\ \frac{\rho_s}{2}\vec{a}_x, & x > x_0 \end{cases}$

พิจารณา ประจุจากแต่ละแผ่นจะได้ว่า

แผ่นที่ 1 : $\vec{D}_1 = \begin{cases} 2\vec{a}_x\ nC/m^2, & x < 1\text{ m} \\ -2\vec{a}_x\ nC/m^2, & x > 1\text{ m} \end{cases}$

แผ่นที่ 2 : $\vec{D}_2 = \begin{cases} -0.5\vec{a}_x\ nC/m^2, & x < -1\text{ m} \\ 0.5\vec{a}_x\ nC/m^2, & x > -1\text{ m} \end{cases}$

แผ่นที่ 3 : $\vec{D}_3 = \begin{cases} -1.5\vec{a}_x\ nC/m^2, & x < -3\text{ m} \\ 1.5\vec{a}_x\ nC/m^2, & x > 3\text{ m} \end{cases}$



Superposition Principle

$$\vec{D} = \vec{D}_1+\vec{D}_2+\vec{D}_3 = \begin{cases} 3\vec{a}_x\ nC/m^2, & -3 < x < -1\ [m] \\ 4\vec{a}_x\ nC/m^2, & -1 < x < 1\ [m] \\ \vec{0}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 338.8\vec{a}_x\ V/m, & -3 < x < -1\ [m] \\ 451.8\vec{a}_x\ V/m, & -1 < x < 1\ [m] \\ \vec{0}\ V/m, & \text{otherwise} \end{cases}$$

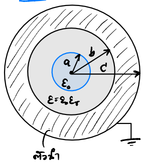
$\therefore$ $\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(5,2,9) &= \vec{0}\ V/m \\ \vec{E}(0,4,0) &= 451.8\vec{a}_x\ V/m\end{aligned}}$

$W_{A\to B} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ เมื่อ $W = -q\int_{x=10}^{x=20} 0\,dx = 0$

$\therefore$ $\boxed{W = 0\text{ J}}$

⑦ กลุ่มประจุกระจายตัวอยู่ในอากาศว่าง (free space) บริเวณ $R < a$ m. ด้วยความหนาแน่นประจุ $\rho_0 R$ C/m^3 ถูกหุ้มด้วยตัวนำทรงกลมกลวงที่มีรัศมีใน b m และรัศมีนอก c m. ต่อสายดินที่ผิวนอกของตัวนำทรงกลม นี้ กำหนดให้ บริเวณระหว่างตัวนำและ Ionized gas เป็น Dielectric ที่มี ε_r แล้ว จงหา $\vec{D}, \vec{E}, V$ ที่ตำแหน่งใดๆ

Sol^n



เนื่องจากประจุกระจายตัวในทรงรัศมี เมื่อ $R \le a$ m.
พิจารณา Gauss' law โดยที่ $\vec{D} = D_R\vec{a}_R$
และใช้ Gaussian Surface เป็นทรงกลม

$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}$

$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(\rho_0 R)R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$

$D_R(4\pi R^2) = \rho_0(4\pi)\left(\frac{R^4}{4}\right)$

$D_R = \frac{\rho_0 R^2}{4}$ C/m^2

ทำให้ $\vec{D} = \frac{\rho_0 R^2}{4}\vec{a}_R$ C/m^2 เมื่อ $0 < R < a$ [m]

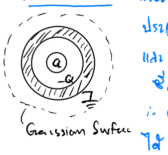
พิจารณาบริเวณ $a \le R < b$: $Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(\rho_0 R)R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$

$Q_{enc} = \rho_0\pi a^4$ C

จาก Gauss' law จะได้ $\vec{D} = \frac{\rho_0 a^4}{4R^2}\vec{a}_R$ C/m^2

บริเวณ $b \le R < c$: ภายใน ตัวนำ $\vec{D} = \vec{0}$ C/m^2

บริเวณ $R > c$: เนื่องจากผิวตัวนำต่อ gnd จึงทำให้ประจุที่ผิวนอกของตัวนำเป็น 0
และ เนื่องจากเกิดการเหนี่ยวนำที่ผิวใน
คือ $Q_{induced} = -\rho_0\pi a^4$ C
$\therefore Q_{enc} = \rho_0\pi a^4 + (-\rho_0\pi a^4) = 0$
ได้ $\vec{D} = \vec{0}$ C/m^2



$$\therefore \boxed{\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^2}{4}\vec{a}_R\ C/m^2, & 0 < R < a\ [m] \\ \frac{\rho_0 a^4}{4R^2}\vec{a}_R\ C/m^2, & a < R < b\ [m] \\ \vec{0}\ C/m^2, & R > b\ [m] \end{cases}}$$

จาก $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$, $\varepsilon = \begin{cases}\varepsilon_0\varepsilon_r & \text{เมื่อ } a < R < b\ (m) \\ \varepsilon_0 & \text{กรณีอื่นๆ}\end{cases}$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}\vec{a}_R\ V/m, & 0 < R < a\ [m] \\ \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}\vec{a}_R\ V/m, & a < R < b\ [m] \\ \vec{0}\ V/m, & R > b\text{ m.} \end{cases}}$$

จาก $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$ และ $V(c) = 0$ V. จะได้ว่า

เมื่อ $R > b$ m. : $\vec{E} = 0 \Rightarrow V = 0$

เมื่อ $a < R < b$ [m] : $V = -\int_b^R \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}dR$

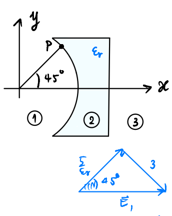
$V = \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right)$ V.

เมื่อ $0 < R < a$ m. : $V = -\int_b^a \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}dR - \int_a^R \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}dR$

$V = \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) - \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}(R^3-a^3)$ V.

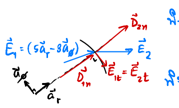
$$\therefore \boxed{V = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[\frac{a^4}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{3}(R^3-a^3)\right] V, & 0 < R < a\text{ m} \\ \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right) V., & a < R < b\ [m] \\ 0\ V., & R > b\text{ m.} \end{cases}}$$

⑧ Dielectric lenses can be used to collimate electromagnetic field. In a figure, the left surface of the lens is that of a circular cylinder, and the right surface is a plane. If $\vec{E}_1$ at point $P(r_0, 45°, z)$ in region 1 is $5\vec{a}_r - 3\vec{a}_\phi$ V/m, what must be the dielectric constant of the lens in order that $\vec{E}_3$ in region 3 is parallel to the x-axis.



Sol^n พิจารณา Boundary Condition: $D_{1n} = D_{2n}$ (∵ไม่มี ρ_s ที่ผิวรอยต่อ) และ $E_{1t} = E_{2t}$

เนื่องจากผิวด้านขวาของ Dielectric ตั้งฉากกับแกน x หมายความว่า $\vec{E}_2$ ต้องขนานกับแกน x



พิจารณา $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$ และ $\vec{a}_r$ ตั้งฉากกับผิวโค้ง จะได้ว่า

$\vec{D}_{2n} = \varepsilon_0\vec{E}_{1n} = 5\varepsilon_0\vec{a}_r$ — (1)

พิจารณา $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}$ และ $\vec{a}_\phi$ ขนานกับผิวโค้ง จะได้ว่า

$\vec{E}_{2t} = -3\vec{a}_\phi$ — (2)

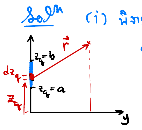
จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\vec{E}_2 = \frac{5}{\varepsilon_r}\vec{a}_r - 3\vec{a}_\phi \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon_r} = 3$ $\therefore$ $\boxed{\varepsilon_r = \frac{5}{3} = 1.67}$

⑨ ประจุไฟฟ้ากระจายบนเส้นตรงที่ตำแหน่งบนแกน z ช่วง $0.03 < z < 0.08$ [m] ด้วยความหนาแน่นประจุ 50 [nC/m] และยังมีประจุไฟฟ้ากระจายตัวบนเส้นตรงที่ตำแหน่งบนแกน z ช่วง $-0.08 < z < -0.03$ [m] ด้วยความหนาแน่นประจุ -50 [nC/m]

(i) จงหาความต่างศักย์ระหว่างจุด (0.05, 0.05, 1) [m] และ (0.05, 0.05, 1) [m] ในระบบคาร์ทีเซียน

(ii) จงหาศักย์ไฟฟ้าที่จุด $(10, \theta, \phi)$ ในระบบพิกัดทรงกลมโดยใช้แนวคิดของไดโพล

Sol^n (i) พิจารณาศักย์ไฟฟ้าจากประจุความหนาแน่น ρ_l ที่วางตัวระหว่าง $a < z < b$



$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_l dz_q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_q)^2}}$

$V(x,y,z) = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dz_q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_q)^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-a+\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}{z-b+\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right)$

ที่จุด (0.05, 0.05, 1) m: ศักย์ไฟฟ้าจากเส้นประจุแต่ละอันคือ

▸ $\rho_{l_1} = 50$ nC/m, $a = 0.03$ m, $b = 0.08$ m.

$V_1(0.05,0.05,1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(50\times10^{-9})\ln\left(\frac{1-0.03+\sqrt{(0.05)^2+(0.05)^2+(1-0.03)^2}}{1-0.08+\sqrt{(0.05)^2+(0.05)^2+(1-0.08)^2}}\right)$ V. $= 23.716$ V

▸ $\rho_{l_2} = -50$ nC/m, $a = -0.08$ m., $b = -0.03$ m.

$V_2(0.05,0.05,1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-50\times10^{-9})\ln\left(\frac{1-(-0.08)+\sqrt{(0.05)^2+(0.05)^2+(1-(-0.08))^2}}{1-(-0.03)+\sqrt{(0.05)^2+(0.05)^2+(1-(-0.03))^2}}\right)$ V. $= -21.254$ V.

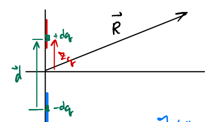
Superposition : $V(0.05,0.05,1) = V_1 + V_2 = 2.462$ V.

จากความสมมาตร ที่ จะได้ว่า $V(0.05,0.05,0) = 0$

$\boxed{\Delta V = 2.462\text{ V.}}$

(ii) สรุปพิจารณา dipole moment ย่อยๆ: $\vec{p} = (dq)(2z_q)\vec{a}_z = (\rho_l dz_q)(2z_q)\vec{a}_z$

$\vec{p} = (2\rho_l z_q dz_q)(\cos\theta\,\vec{a}_R - \sin\theta\,\vec{a}_\theta)$



ศักย์ไฟฟ้าจาก dipole : $V_{dipole} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

$\vec{R} = 10\vec{a}_R \rightarrow V_{dipole}(10,\theta,\phi) = \frac{(2\rho_l z_q dz_q)(10\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_0(10^3)}$

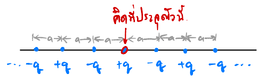
ดังนั้น ศักย์ไฟฟ้าจากรูปไดโพลคือ

$V(10,\theta,\phi) = \frac{\rho_l\cos\theta}{200\pi\varepsilon_0}\int_{0.03}^{0.08} z_q dz_q = \frac{\rho_l\cos\theta}{200\pi\varepsilon_0}\left(\frac{0.08^2}{2}-\frac{0.03^2}{2}\right) = \frac{1.375\times10^{-5}\rho_l\cos\theta}{\pi\varepsilon_0}$

แทนค่า $\rho_l = 50$ nC/m^2 และ ε_0 จะได้ว่า $\boxed{V(10,\theta,\phi) = 0.0247\cos\theta\ \ V.}$

⑩ Consider an infinite chain of point charge $\pm q$ (with alternating signs), strung out along the x-axis, each distance a from its nearest charges. Find the work per particle required to assemble this system

Sol^n งานที่ต้องใช้ในการสร้างระบบ $W_{tot} = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i \Rightarrow$ งานต่อประจุ 1 ตัว $W = \frac{1}{2}qV$ (ประจุตัวอื่น / ศักย์ที่ประจุตัวอื่น)



Taylor Series : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$

$\therefore \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

สรุปจะได้ว่า (สมมาตรซ้าย-ขวา)

$W = \frac{1}{2}q\times2\times\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(-\frac{q}{a}+\frac{q}{2a}-\frac{q}{3a}+\ldots\right)\right\}$

$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right\}$

$\boxed{W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\ln(2)}$

Note : $W = -(\ln 2)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ — Madelung constant for 1-dimensional array

⑪ A sphere of a carries a charge density $\rho_v(R) = kR$ (k = constant). Find the energy of the configuration. (Calculate it in at least two different ways)

Sol^n Method I ใช้สูตร $W = \frac{1}{2}\int V dq$

พิจารณา Gauss' law: $\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}$

▸ $R < a$: $D_R(4\pi R^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(kR)R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$

$D_R(4\pi R^2) = k(4\pi)\left(\frac{R^4}{4}\right)$

$\therefore \vec{D} = \frac{kR^2}{4}\vec{a}_R$ และ $\vec{E} = \frac{kR^2}{4\varepsilon_0}\vec{a}_R$

▸ $R \ge a$: $Q_{enc} = k\pi a^4$

$\therefore \vec{D} = \frac{ka^4}{4R^2}\vec{a}_R$ และ $\vec{E} = \frac{ka^4}{4\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R$

จาก $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}$ และให้ $V = 0$ ที่ ∞

เมื่อ $R < a$

$V = -\int_\infty^a \frac{ka^4}{4\varepsilon_0 R^2}dR - \int_a^R \frac{kR^2}{4\varepsilon_0}dR = \frac{k}{12\varepsilon_0}(4a^3 - R^3)$

$\therefore W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{k}{12\varepsilon_0}(4a^3-R^3)(kR)R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$

$W = \frac{k^2}{24\varepsilon_0}(4\pi)\left[a^3R^4 - \frac{R^7}{7}\right]_{R=0}^{R=a} = \boxed{\frac{\pi k^2 a^7}{7\varepsilon_0}}$

Method II $W = \frac{1}{2}\int_{\text{all space}}\vec{D}\cdot\vec{E}\, dv$

$W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}(\vec{D}\cdot\vec{E})R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$

$= \frac{1}{2}(4\pi)\left\{\int_0^a\left(\frac{kR^2}{4}\right)\left(\frac{kR^2}{4\varepsilon_0}\right)R^2dR + \int_a^\infty\left(\frac{ka^4}{4R^2}\right)\left(\frac{ka^4}{4\varepsilon_0 R^2}\right)R^2dR\right\}$

$= 2\pi\left\{\frac{k^2}{16\varepsilon_0}\left[\frac{R^7}{7}\right]_0^a + \frac{ka^8}{16\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{R}\right]_a^\infty\right\}$

$= \frac{k^2\pi}{8\varepsilon_0}\left\{\frac{a^7}{7}+a^7\right\} = \boxed{\frac{\pi k^2 a^7}{7\varepsilon_0}}$

⑫** A point charge q is at the center of an uncharged spherical conducting shell, of inner radius a and outer radius b. How much work would it take to move the charge out to infinity (Through a tiny hole drilled in a shell)?

Sol^n

ในตอนแรกเมื่อนำ $+q$ มาไว้ตรงกลาง ตัวนำทรงกลมกลวง จะเกิด ประจุเหนี่ยวนำขึ้นที่ผิวใน $-q$ และ ผิวนอก $+q$, หาพลังงานทั้งหมดของระบบนี้:

method I : หางานในการสร้างระบบนี้

- งานที่ใช้ นำจุดประจุ $+q$ มาวาง $= 0$ J. (เอามาวางได้เลยๆ เลย)
- งานจากการเหนี่ยวนำประจุ $-q$ ที่ผิวใน (รัศมี a)

$W_a = \frac{1}{2}\int V_a dq_a = \frac{1}{2}\int_0^{-q}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}dq_a = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

- งานจากการเหนี่ยวนำประจุ $+q$ ที่ผิวนอก (รัศมี b)

$W_b = \frac{1}{2}\int V_b dq_b = \frac{1}{2}\int_0^{q}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}dq_b = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}$

$\therefore W_i = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ —— (*)

method II : งานที่ใช้สร้าง ระบบ เท่ากับผลต่างของพลังงานที่สะสมในสนามไฟฟ้า (= งานที่ใช้นำ shell มาครอบ)

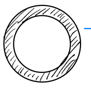
พลังงานในสนามตอนแรก:

$W_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{1}{R^2}dR$

พลังงานในสนามหลังจากนำ shell มาครอบ ($\vec{E}$ ในตัวนำ $= \vec{0}$)

$W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\int_0^a \frac{1}{R^2}dR + \int_b^\infty \frac{1}{R^2}dR\right\}$

$\therefore W_i = W_2 - W_1 = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{R^2}dR = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$



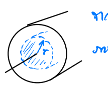
หลังเอา $+q$ ออก $\Rightarrow$ shell กลับมาเป็นกลาง

$\therefore W_f = 0 \rightarrow \therefore$ งานที่ใช้เอา $+q$ ออก คือ $W_f - W_i = \boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$

⑬ A very long cylinder, of radius a, carries a uniform polarization $\vec P$ perpendicular to its axis. Find the electric field inside the cylinder. Show that the electric field outside the cylinder can be expressed in the form $\vec E = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}[2(\vec P\cdot\vec a_r)\vec a_r - \vec P]$

Sol^n พิจารณาทรงกระบอกประจุ ρ_0 , หา $\vec E$ ที่ระยะ r จากแกน

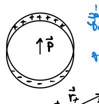
จาก Gauss' law $\oint \vec E\cdot d\vec s = Q_{enc}/\varepsilon_0$



พื้นผิวทรงกระบอก : $E_r 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \pi r^2 l$

นั่นคือ $\vec E = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\vec a_r$

สำหรับ ข้อนี้ เหมือนทรงกระบอกสองอันที่มีประจุ $\pm\rho_0$ ซ้อนทับกันอยู่



ซึ่งทำให้เกิด dipole ภายในทรงกระบอก

จะได้ว่า $\vec E_{inside} = \vec E_+ + \vec E_- = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\vec r_+ - \vec r_-)$

dipole moment : $\vec p = q\vec d = q(\vec r_- - \vec r_+)$

และจาก $\vec P = \lim_{v\to 0}\frac{\vec p}{v}$ จะได้ว่า $\vec P = \rho_0(\vec r_- - \vec r_+)$

ดังนั้น สนามไฟฟ้า ภายในทรงกระบอกคือ $\boxed{\vec E = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\vec P}$ (inside)

สนามนอกทรงกระบอก : $E(2\pi r l) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\pi a^2 l$

$\therefore \vec E = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r}\vec a_r$

สองทรงกระบอกซ้อนกัน : $\vec E = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\vec a_{r+}}{r_+} - \frac{\vec a_{r-}}{r_-}\right)$

จากรูป $\vec r_+ = \vec r - \frac{\vec d}{2}$

$\frac{\vec a_{r+}}{r_+} = (\vec r - \frac{\vec d}{2})(r^2 - \vec r\cdot\vec d)^{-1}$; $d \ll r$

$= \frac{1}{r^2}(\vec r - \frac{\vec d}{2})(1 - \frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2})^{-1}$

$= \frac{1}{r^2}(\vec r - \frac{\vec d}{2})(1 + \frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2})$ Binomial expansion

$\approx \frac{1}{r^2}\left[\vec r + (\frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2})\vec r - \frac{\vec d}{2}\right]$

ทำนองเดียวกัน $\frac{\vec a_{r-}}{r_-} = \frac{1}{r^2}\left[\vec r - (\frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2})\vec r + \frac{\vec d}{2}\right]$

จะได้ว่า

$\frac{\vec a_{r+}}{r_+} - \frac{\vec a_{r-}}{r_-} = \frac{1}{r^2}\left\{\left(\vec r + (\frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2})\vec r - \frac{\vec d}{2}\right) - \left(\vec r - (\frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2})\vec r + \frac{\vec d}{2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{r^2}\left\{2\left(\frac{\vec r\cdot\vec d}{r^2}\right)\vec r - \vec d\right\}$; $\vec P = \rho_0\vec d$

$\therefore \boxed{\vec E = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left[2(\vec P\cdot\vec r)\vec a_r - \vec P\right]}$ (outside)

---

⑭ Assuming the earth to be a large conducting sphere (radius = 6.37×10^3 km) surrouded by air, find

(i) the capacitance of the earth

(ii) the maximum charge that can exist on earth before the air breakdown.

(Dielectric strength of air is 3×10^6 V/m)

Sol^n (i) สมมติว่าโลกมีประจุ Q

จาก Gauss' law จะได้ว่า

$\vec E = \begin{cases} \vec 0 , & R < R_e \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}\vec a_R , & R > R_e \end{cases}$

นั่นคือ $V = -\int_\infty^{R_e}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}dR = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R_e}$

$C = \frac{Q}{V}$

$= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot R_e$

อากาศ $\varepsilon_r = 1.0$

$\therefore \boxed{C_{earth} = 0.708 \text{ mF}}$

(ii) พิจารณา $E_{break\,down} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{max}}{R_e^2}$

$\therefore Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 R_e^2\cdot E_{breakdown}$

$= 4\pi(8.854\times10^{-12})(6.37\times10^6)^2(3\times10^6)$

$= \boxed{13.5 \text{ GC}}$

---

⑮ Suppose you have enough linear dielectric material, of dielectric constant ε_r, to half-fill a parallel plate capacitor. By what fraction is the capacitance increased if you distribute the material as in figure (a)? How about figure (b)? For a given potential difference V between the plates, find $\vec E$, $\vec D$ and $\vec P$, in each region, and the free and bound charge on all surfaces, for both cases.

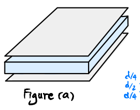


Figure (a)

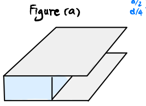


Figure (b)

Sol^n plate capacitor : $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

กรณี (a) : 3 อันต่ออนุกรมกัน

$\frac{1}{C_a} = \frac{d/4}{\varepsilon_0 A} + \frac{d/2}{\varepsilon_0\varepsilon_r A} + \frac{d/4}{\varepsilon_0\varepsilon_r A}$

$\frac{1}{C_a} = \frac{d}{2\varepsilon_0 A}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

$C_a = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)$

$\therefore \boxed{\frac{C_a}{C_0} = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}}$

กรณี (b) : 2 อันขนานกัน

$C_b = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{2d} + \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$

$C_b = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2}\right)$

$\therefore \boxed{\frac{C_b}{C} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2}}$

* สังเกตว่า $\frac{C_b}{C_0} - \frac{C_a}{C_0} = \frac{\varepsilon_r^2 + 2\varepsilon_r + 1 - 4\varepsilon_r}{2(\varepsilon_r + 1)} = \frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{2(\varepsilon_r + 1)} > 0$

พิจารณาตัวเก็บประจุ (a) ดังรูป

Boundary Condition : $\vec D_{n\,air} = \vec D_{n\,dielectric}$

Gauss' law : $Q_{enc} = CV = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)V$

$\therefore \boxed{\vec D_{air(a)} = \vec D_{di(a)} = \left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)\frac{\varepsilon_0 V}{d}\vec a_x}$

$E = \frac{D}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\vec E_{air(a)} = \left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)\frac{V}{d}\vec a_x}$ และ $\boxed{\vec E_{di(a)} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon_r}\right)\frac{V}{d}\vec a_x}$

$\vec P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec E \Rightarrow \boxed{\vec P_{air(a)} = \vec 0}$ และ $\boxed{\vec P_{di(a)} = \frac{2(\varepsilon_r - 1)}{(1+\varepsilon_r)}\frac{\varepsilon_0 V}{d}\vec a_x}$

$\rho_s = \rho_{sf} = \frac{Q}{A}$

แผ่นโลหะล่าง : $\boxed{\rho_s = \left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)\frac{\varepsilon_0 V}{d}}$ (ฝั่งประจุบวก)

surface ล่าง : $\rho_{sf} = 0$, $\rho_{sb} = \vec P\cdot\vec a_n$; $\boxed{\rho_s = -\frac{2(\varepsilon_r - 1)}{(1+\varepsilon_r)}\frac{\varepsilon_0 V}{d}}$ (ฝั่งที่อยู่ใกล้ plate+)

พิจารณาตัวเก็บประจุ (b) ดังรูป

Boundary Condition : $E_{t\,air} = E_{t\,di}$

ส่วนที่เป็นอากาศ : $C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$

Gauss' law : $Q_{enc} = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\frac{V}{d} \Rightarrow D_{air} = \frac{Q_{enc}}{(A/2)}$ $\therefore \boxed{\vec D_{air} = \frac{\varepsilon_0 V}{d}\vec a_z}$

$\boxed{\vec E_{air} = \vec E_{di} = \frac{V}{d}\vec a_z} \rightarrow \boxed{\vec D_{di} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V}{d}\vec a_z}$

$\boxed{\vec P_{air} = \vec 0}$, $\boxed{\vec P_{di} = (\varepsilon_r - 1)\frac{V}{d}\vec a_z}$

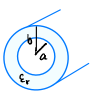
• แผ่นโลหะ (ฝั่งบวก) : ส่วนที่ไม่ใช่ dielectric $\boxed{\rho_s = \frac{\varepsilon_0 V}{d}}$; ส่วนที่มี dielectric $\boxed{\rho_s = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 V}{d}}$

• ผิว dielectric : $\boxed{\rho_s = -(\varepsilon_r - 1)\frac{V}{d}}$

---

⑯ A capacitor consits of two coaxial metallic cylindrical surfaces of a length 30 mm and radii 5 mm and 7 mm. The dielectric material between the surfaces has a relative permittivity $\varepsilon_r = 2 + (4/r)$, where r is measured in mm. Determine the capacitance.

Sol^n



a = 5 mm , b = 7 mm.

สมมติว่า เก็บประจุ Q ที่แผ่นใน

$D_r(2\pi r l) = Q$

$D_r = \frac{Q}{2\pi r l}$ (a<r<b)

จะได้ว่า $\vec E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r l}\vec a_r$ (a<r<b)

$V_{ab} = -\int_b^a\vec E\cdot d\vec r = -\frac{Q}{2\pi l\varepsilon_0}\int_b^a\frac{1}{(2+\frac4r)r}dr$

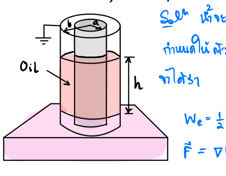
$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_b^a\frac{1}{r+2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln(r+2)\Big|_b^a$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right) \Rightarrow C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}$

$\therefore \boxed{C = 13.28 \text{ pF}}$

---

⑰ Two long coaxial cylindrical metal tubes (inner radius a, outer radius b) stand vertically in a tank of dieetric oil (susceptibility χ_e, mass density ρ_m). The inner one is maintained at potential V, and the outer one is grounded. To what height (h) does the oil rise, in the space between the tube.



Sol^n หาแรงดูดขึ้นเนื่องจาก electrostatic force : $\vec F = \nabla W_e$ ∵ V คงที่ ได้รับพลังงานจากแหล่งจ่าย

กำหนดให้ ตัวเก็บประจุยาว l และ มีน้ำมันถูกดูดขึ้นสูง z (z<<l)

จะได้ว่า $C = \frac{2\pi\varepsilon_0(l-z)}{\ln(b/a)} + \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r z}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}[l + z(\varepsilon_r - 1)] = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}[l + z\chi_e]$

$W_e = \frac12 CV^2$ ว่าพลังงานขึ้นกับ z

$\vec F = \nabla W_e = \frac{d}{dz}W_e\vec a_z = \frac12 V^2\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}(\chi_e)\vec a_z$

สมดุลแรงที่ z = h : $\vec F + mg(-\vec a_z) = 0$

$\therefore \frac{\pi\varepsilon_0\chi_e V^2}{\ln(b/a)} = \rho_m\pi(b^2-a^2)hg \Rightarrow \boxed{h = \frac{\varepsilon_0\chi_e V^2}{\rho_m(b^2-a^2)g\ln(b/a)}}$

---

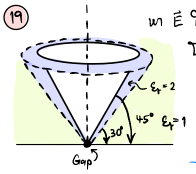
⑱ Find the electrostatic energy stored in the region of space R>b around and electric dipole of moment $\vec p$.

Sol^n $V_{dipole} = \frac{\vec p\cdot\vec R}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \longrightarrow \vec E = -\nabla V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\{2\cos\theta\vec a_R + \sin\theta\vec a_\theta\}$

$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_b^\infty|E|^2R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi = \frac{p^2}{32\pi^2\varepsilon_0}(2\pi)\int_0^\pi(4\cos^2\theta + \sin^2\theta)\sin\theta\, d\theta\cdot\int_b^\infty\frac{1}{R^4}dR = \frac{p^2}{32\pi^2\varepsilon_0}(2\pi)(4)\left(\frac{1}{3b^3}\right) = \boxed{\frac{p^2}{12\pi\varepsilon_0 b^3}}$

---

⑲ หา $\vec E$ ในระบบที่ประกอบไปด้วยตัวนำรูปกรวยขนาดใหญ่มากโดยที่ V = 0 ที่ θ = 90° และ V = V_0 V. ที่ θ = 45° โดยที่ระหว่างกรวยมี Dielectric สองชนิด ดังรูป



Sol^n พิจารณา $\vec E$ มีทิศในแนว $\vec a_\theta$ นั่นคือ V = V(θ)

บริเวณระหว่างแผ่น $\rho_v = 0$ → $\nabla^2 V = 0$

$\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta}V) = 0$

$\sin\theta\frac{d}{d\theta}V = A$

$V = A\ln(\tan\frac\theta2) + B$

$\varepsilon_r = 1$: $V_1 = A_1\ln(\tan\frac\theta2) + B_1$

$\varepsilon_r = 2$: $V_2 = A_2\ln(\tan\frac\theta2) + B_2$

พิจารณา Boundary conditions :

• θ = 90° = $\frac\pi2$, V = 0 V , $\varepsilon_r = 1$

$0 = A_1\ln(\tan\frac\pi4) + B_1 \Rightarrow B_1 = 0$

• θ = 45° = $\frac\pi4$, V = V_0 V. , $\varepsilon_r = 2$

$V_0 = A_2\ln(\tan\frac\pi8) + B_2$

• ที่รอยต่อ : V ต่อเนื่อง ⟹ $A_1\ln(\tan\frac\pi6) = A_2\ln(\tan\frac\pi6) + B_2$

θ = $\frac\pi3$ ($V_1(\frac\pi3) = V_2(\frac\pi3)$)

• ที่รอยต่อ (θ = $\frac\pi3$) $D_{1n} = D_{2n}$

$\varepsilon_0 E_{n1} = \varepsilon_0(2)E_{n2}$

$\varepsilon_0(-\nabla V_1) = 2\varepsilon_0(-\nabla V_2)$

$\varepsilon_0\{-\frac1R\frac{d}{d\theta}(A_1\ln(\tan\frac\theta2))\}\vec a_\theta = 2\varepsilon_0\{-\frac1R\frac{d}{d\theta}(A_2\ln(\tan\frac\theta2) + B_2)\}\vec a_\theta$

$\varepsilon_0(-\frac{A_1}{R}\csc\theta)\vec a_\theta = 2\varepsilon_0(-\frac{A_2}{R}\csc\theta)\vec a_\theta$

$\therefore A_1 = 2A_2$

แก้สมการแบบ : $2A_2\ln(\tan\frac\pi6) = A_2\ln(\tan\frac\pi6) + B_2$

$B_2 = A_2\ln(\tan\frac\pi6)$

จะได้ว่า $V_0 = A_2(\ln(\tan\frac\pi8) + \ln(\tan\frac\pi6))$

$\therefore A_2 = \frac{V_0}{\ln\{\tan\frac\pi8\cdot\tan\frac\pi6\}}$, $A_1 = \frac{2V_0}{\ln\{\tan\frac\pi8\tan\frac\pi6\}}$

จาก $\vec E = -\nabla V$

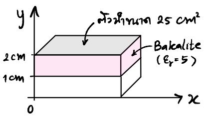
$\therefore \boxed{\vec E = \begin{cases} -\frac{V_0\csc\theta}{R\{\ln(\tan\frac\pi8\tan\frac\pi6)\}}\vec a_\theta , & \frac\pi4 < \theta < \frac\pi3 \\ -\frac{2V_0\csc\theta}{R\{\ln(\tan\frac\pi8\tan\frac\pi6)\}}\vec a_\theta , & \frac\pi3 < \theta < \frac\pi2 \end{cases}}$

---

⑳ ตัวนำแผ่นขนาน 2 แผ่นขนาด 25 cm² วางที่ระนาบ y = 0 และ y = 2 [cm] ช่องว่างระหว่างแผ่นบริเวณ 1 < y < 2 [cm] คือ Bakalite (ε_r = 5) เมื่อป้อนศักย์ไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำ 15 V. โดยให้ศักย์ที่แผ่น y = 0 cm มีค่า 15 V. จงใช้สมการลาปลาซ หาฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าภายในใน Bakalite และ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าต่อพื้นที่บนผิวตัวนำที่ y = 2 cm เมื่อกำหนดให้ช่องว่างระหว่างแผ่นบริเวณ 0 < y < 1 [cm] เป็นวัสดุต่อไปนี้

(i) Polyethylene (ε_r = 2.3)

(ii) โลหะเงิน



Sol^n (i) กรณีส่วนล่างเป็น Polyethylene

$\varepsilon_r = 5$, $\varepsilon_r = 2.3$, V = 5V.

พิจารณาบริเวณ 0 < y < 2 [cm]

เป็นบริเวณที่ไม่มีประจุ : $\nabla^2 V = 0$

พิจารณาสนามในแนว y $\therefore V = ay + b$

จะได้ว่า ใน Bakalite : $V_1 = a_1 y + b_1$

และใน Polyethylene : $V_2 = a_2 y + b_2$

พิจารณา Boundary condition :

• ที่ y = 0 [cm] , V = 15 V. ⟹ $15 = a_2(0) + b_2$ $\therefore b_2 = 15$ —(1)

• ที่ y = 2 [cm] , V = 0 V. ⟹ $0 = a_1(2) + b_1$ $\therefore b_1 = -2a_1$ —(2)

• ที่ y = 1 [cm] : $V_1 = V_2$ ⟹ $a_1(1) + (-2a_1) = a_2(1) + 15$

$-(a_1 + 15) = a_2$ —(4)

• ที่ y = 1 [cm] : $\vec D_{1n} = \vec D_{2n}$; $\vec D = \varepsilon\vec E$

$\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\vec E_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\vec E_{2n}$; $\vec E = -\nabla V$

$5\varepsilon_0\left(-\frac{\partial}{\partial y}a_1(y-2)\right)\vec a_y = 2.3\varepsilon_0\left(-\frac{\partial}{\partial y}(a_2 y + 15)\right)\vec a_y$

$5\varepsilon_0(-a_1)\vec a_y = 2.3\varepsilon_0(-a_2)\vec a_y$

$5\varepsilon_0(-a_1)\vec a_y = 2.3\varepsilon_0(a_1 + 15)\vec a_y$

จะได้ว่า $a_1 = -4.726$

$\therefore$ ใน Bakalite $\boxed{V(y) = -4.726(y-2) \text{ V.}}$ (y ในหน่วย cm)

หาประจุที่ผิวแผ่นตัวนำด้านบน : $\rho_s = \vec D\cdot\vec a_n$

$\vec D = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec E = \varepsilon_0\varepsilon_r(-\nabla V)$

$\vec D = 5\varepsilon_0(4.726)\vec a_y$ C/cm² !!

$\vec D = (2.092\times10^{-8})\vec a_y$ C/m²

$\vec a_n = -\vec a_y$ $\therefore \boxed{\rho_s = -20.92 \text{ nC/m}^2}$

(ii) กรณีส่วนล่างเป็น aluminium (ตัวนำ)

ทำให้ V(0 ≤ y ≤ 1 cm.) = 15 V.

พิจารณา บริเวณ 1 < y < 2 [cm] ไม่มีประจุ

และสนามไฟฟ้าอยู่ในแนว y

$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V = ay + b$

ที่ y = 1 cm , V = 15 V.

ที่ y = 2 cm , V = 0 V.

$\boxed{V(y) = -15(y-2) \text{ V.}}$ เมื่อ 1 ≤ y ≤ 2 [cm]

หาประจุที่ผิวบน : $\rho_s = \vec D\cdot\vec a_n$

$\vec D = \varepsilon_0\varepsilon_r(-\nabla V) = 5\varepsilon_0(15 \text{ V/cm})\vec a_y$

$\vec D = (6.641\times10^{-8})\vec a_y$ C/m²

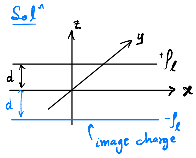
$\vec a_n = -\vec a_y$ $\therefore \boxed{\rho_s = 66.41 \text{ nC/m}^2}$

㉑ A uniform line charge ρ_ℓ is placed on an infinite straight wire, a distance d above a grounded conducting plane. (Let's say the wire runs parallel the x-axis and directly above it, and the conducting plane is the xy plane.)

(a) Find the potential in the region above the plane.

(b) Find the charge density ρ_s induced on the conducting plane.

Sol^n



$r_+ = \sqrt{y^2 + (z-d)^2}$

$r_- = \sqrt{y^2 + (z+d)^2}$

จากรูป ใช้ Gauss' law จะได้ว่า $\vec E_+ = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_+}\vec a_{r+}$

ที่ระนาบ xy : V = 0 นั่นคือ $V_+(r_+ = d) = 0$ จะได้ว่า

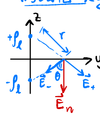
$V_+ = -\int_d^{r_+}\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_+}dr_+ = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{r_+}\right)$

ทำนองเดียวกัน : $V_- = \frac{-\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{r_-}\right)$

Superposition : $V = V_+ + V_- = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+(z+d)^2}}{\sqrt{y^2+(z-d)^2}}\right)$

$\therefore \boxed{V(x,y,z) = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{y^2+(z+d)^2}{y^2+(z-d)^2}\right)}$ (z > 0)

ที่ระนาบ xy :



จากรูป

$\vec E_n = 2\left(\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac1r\right)\cos\theta(-\vec a_z)$

$\vec E_n = \frac{\rho_\ell}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{y^2+d^2}}\cdot\frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}(-\vec a_z)$

$\vec E_n = -\frac{\rho_\ell d}{\pi\varepsilon_0(y^2+d^2)}\vec a_z \longrightarrow \rho_s = \vec D\cdot\vec a_n = \varepsilon_0\vec E\cdot\vec a_n$, $\vec a_n = \vec a_z$ $\therefore \boxed{\rho_s = -\frac{\rho_\ell d}{\pi(y^2+d^2)}}$