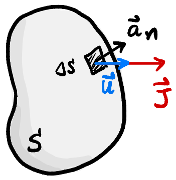
Steady Electric Current

Current : กระแส คืออัตราการเปลี่ยนแปลงประจุต่อเวลา
- Free charge เคลื่อนที่
- Bound charge มีการเปลี่ยนแปลง

- Conduction Current : ประจุเคลื่อนตาม $\vec{E}$
- Convection Current : ประจุเคลื่อนในสุญญากาศ
- Electrolytic Current : ion เคลื่อนในสาร

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}} \quad [A]$$

Current density & Ohm's law



พิจารณาประจุที่กำลังเคลื่อนที่พื้นที่เล็กๆ ΔS ด้วยความเร็ว $\vec{u}$ ถ้าจำนวนประจุต่อหน่วยปริมาตรคือ N และประจุแต่ละตัวมีขนาด q (ประจุของ e^- เป็นลบ) จะได้ว่าในช่วงเวลา Δt จะมีประจุผ่านไปทั้งหมด : $\Delta Q = Nq(\vec{u}\cdot\vec{a}_n)\Delta S \Delta t$

$$\Delta Q = Nq\vec{u}\cdot\vec{a}_n \Delta S \Delta t = Nq\vec{u}\cdot\Delta\vec{S}\Delta t$$

กำหนดให้ $\vec{J} = Nq\vec{u}$ จะได้ว่าประจุที่ผ่าน S : $Q = (\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S})\Delta t$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \boxed{I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}}$$

$\vec{J}$: convection current density ความหนาแน่นกระแสการพา

$$\boxed{\vec{J} = \rho_v \vec{u}} \quad [A/m^2]$$

$\vec{u}$: Drift velocity

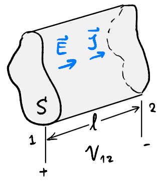
free charge per volume : $\rho_v = Nq$ $[C/m^3]$

สำหรับ **Metallic conductors** : $\vec{u} = -\mu_e \vec{E}$ → electron mobility $[m^2/Vs]$

Ohmic Media { **Point form of Ohm's law:** $\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$

$\sigma \equiv$ conductivity

- สำหรับ e^- : $\sigma = -\rho_e \mu_e$
- สำหรับสารที่มีการเคลื่อนที่ของ e^- และ hole : $\sigma = -\rho_e\mu_e + \rho_h\mu_h$



พิจารณาตัวนำยาว ℓ ที่มีพื้นที่หน้าตัด S

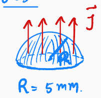
จะได้ว่า $V_{12} = E\ell = \frac{J\ell}{\sigma} = \frac{I\ell}{\sigma S}$

$V_{12} = I\left(\frac{\ell}{\sigma S}\right) \longrightarrow \boxed{V_{12} = IR}$ (Ohm's law)

Resistance ความต้านทาน : $\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\rho\ell}{S}}$ $[\Omega]$ | Resistivity : $\rho = \frac{1}{\sigma}$

* Conductance : $G = \frac{1}{R}$ $[\Omega^{-1}$ หรือ $S]$ *

(ex) จงหากระแสการพาที่ผ่านผิวรับซึ่งเป็นรูปครึ่งทรงกลมรัศมี 5 mm. ที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < \phi < 2\pi$ และความเร็วของประจุ กำหนดให้ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าของอิเล็กตรอนที่ผ่านบริเวณดังกล่าวคือ $-0.2\ nC/mm^3$ และความหนาแน่นกระแสการพาเท่ากับ $-2\ A/mm^2$



$R = 5\,mm.$

Sol^n จากโจทย์ $\vec{J} = (-2)\vec{a}_z\ A/mm^2$ $\quad \vec{a}_R = (\sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{a}_y + \cos\theta\,\vec{a}_z)$

$$\therefore I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S (-2\vec{a}_z)\cdot(\vec{a}_R dS) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (-2)(R^2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta\,d\phi$$

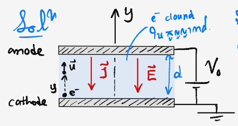
$$= (-2R^2)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = (-2R^2)(2\pi)\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right] = -2\pi R^2$$

$\therefore \boxed{I = -50\pi\ A.}$ จาก $\vec{J} = \rho_v\vec{u}$ $\therefore \vec{u} = \frac{\vec{J}}{\rho_v} = \frac{-2\ A/mm^2}{-0.2\ nC/mm^3}\vec{a}_z = \boxed{10^{10}\vec{a}_z\ mm/s}$

Vacuum-tube diodes*

In vacuum-tube diodes, electrons are emitted from a 'hot' cathode at zero potential and collected by an anode maintained at a potential V_0, resulting in a convection current flow. Assuming that the cathode and the anode are parallel conducting plates and that the electrons leave the cathode with a zero initial velocity (space charge limited condition), what is the relation between the current density J and V_0

Sol^n



e^- เริ่มเคลื่อนที่ด้วยแรงทางไฟฟ้าจาก $u=0$ (ประจุ e^- : $q = -e$)

กฎอนุรักษ์พลังงาน

$\frac{1}{2}mu^2 + (-e)V = 0$ (e^- มวล m)

$u = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$

พิจารณา Space-charge-limited vacuum diode ดังรูป (เกิด electron clound กระจายระหว่าง plates)

Poisson equation : $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$

มีสนามในแนว y : $V = V(y) \Rightarrow \frac{d^2}{dy^2}V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$ —(1)

จาก $\vec{J} = \rho_v\vec{u}$ (ใน steady state J คงที่)

$-J\vec{a}_y = \rho_v\sqrt{\frac{2eV(y)}{m}}\vec{a}_y$

$-\rho_v = J\left(\frac{m}{2eV}\right)^{1/2}$ แทนค่าใน (1)

จะได้ว่า $\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-1/2}$

ให้ $z = \frac{dV}{dy} \rightarrow \frac{dz}{dV} = \frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dV} \rightarrow z\frac{dz}{dV} = \frac{d^2V}{dy^2}$

$z\frac{dz}{dV} = \frac{J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-1/2}$

integrate : $\frac{1}{2}z^2 = \frac{2J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}J^{1/2} + c_1$

เนื่องจาก e^- เริ่มเคลื่อนที่จาก $u=0 \rightarrow E(y=0) = 0 \rightarrow \frac{dV}{dy}\Big|_{y=0} = 0$

จะได้ว่า $c_1 = 0$: $\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}$

จัดรูปได้ $\int_0^{V_0} V^{-1/4}dV = \int_0^d 2\sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}dy$

$\frac{4}{3}V_0^{3/4} = 2\sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}d$

$$\therefore \boxed{J = \frac{4\epsilon_0}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,V_0^{3/2}}$$

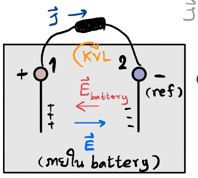
($J \propto V_0^{3/2}$) → กระแสการพาภายในไดโอดที่ไม่เป็นไปตามกฎของโอห์ม ($J \propto V_0$)

(Child-Langmuir Law)

Electromotive force & KVL

จาก $\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \oint(\sigma\vec{J})\cdot d\vec{\ell} = 0$ → สร้างกระแสในวงปิดไม่ได้ถ้า $\vec{E}$ คงที่ตลอดทั้งวงปิด

$\vec{J} = \vec{0}$

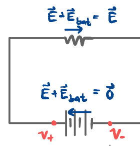


Battery ต้องสร้างสนามภายในเพื่อดึงประจุให้เคลื่อนที่ → Electromotive force

$$emf = \mathcal{V} = \underbrace{\int_{ref} \vec{E}_{bat}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{ref}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{\text{inside battery}}$$

KVL ในวงจร : $\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \underset{(outside)}{\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{\ell}} + \underset{(inside)}{\int_-^+\vec{E}\cdot d\vec{\ell}} = 0$

จะได้ว่า $emf = \mathcal{V} = \underset{(outside)}{\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{\ell}} = V_+ - V_-$



$\vec{J} = \sigma(\vec{E}+\vec{E}_{bat})$

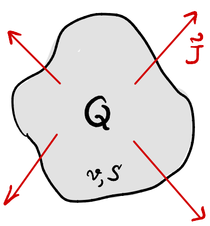
เมื่อต่อ R : $\vec{J} = \sigma(\vec{E}+\vec{E}_{bat}) \longrightarrow emf = \oint\left(\frac{\vec{J}}{\sigma}\right)\cdot d\vec{\ell}$

$emf = \Sigma IR$

$\vec{E}_{bat} = \begin{cases} -\vec{E} & \text{(ภายในแบตเตอรี่)} \\ \vec{0} & \text{(ภายนอก)} \end{cases}$

เมื่อมีแหล่งกำเนิดหลายตัว $\Rightarrow \boxed{\Sigma emf = \Sigma IR}$ (Kirchoff's voltage law)

Equation of continuity & KCL



พิจารณาบริเวณที่มีปริมาตร v (ล้อมด้วยผิวปิด S) ภายในปริมาตรนี้มีประจุ Q หากมีกระแส I ไหลเข้า/ออก จากบริเวณนี้

จาก Principle of conservation of charge ประจุนั้นไม่สามารถถูกสร้างหรือทำลายได้ ดังนั้น ถ้า I ไหลเข้า → Q เพิ่ม / I ไหลออก → Q ลด

$\therefore I = -\frac{dQ}{dt} \rightsquigarrow \oint\vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_v dv$

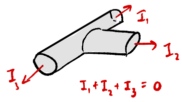
จาก $\oint\vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_v(\nabla\cdot\vec{J})dv \rightsquigarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t}}$ (Equation of continuity)

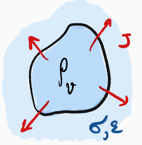
สำหรับ steady current

$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \longrightarrow \oint\vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$

$\therefore \boxed{\sum_j I_j = 0}$

กระแสเข้า = กระแสออก





พิจารณาประจุที่อยู่ในบริเวณที่มี conductivity = σ, permittivity = ϵ

จาก $\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$ จะได้ว่า

$\sigma(\nabla\cdot\vec{E}) = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$

ณ ขณะนั้นจาก Gauss' law : $\nabla\cdot\vec{E} = \rho_v/\epsilon$ นั่นคือ

$\frac{\sigma}{\epsilon}\rho_v = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t} \Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho(t)}\frac{1}{\rho_v}d\rho_v = \int_0^t -\frac{\sigma}{\epsilon}dt$

$\therefore \boxed{\rho_v(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}$ → ประจุจะผลักกันไปที่ "ขอบ" ของตัวนำ เพื่อทำให้ $\rho_v = 0$

ในตัวนำ $\frac{\epsilon}{\sigma}$ จะมีค่าน้อยมาก → ρ_v หายไปอย่างรวดเร็ว

Joule's law

งานที่สนามไฟฟ้าทำ (ΔW) เพื่อให้ประจุขยับไป $\Delta\ell$: $\Delta W = q\vec{E}\cdot\Delta\vec{\ell}$

กำลัง (power) $P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = q\vec{E}\cdot\vec{u}$ (กำลังต่อประจุ 1 ตัว)

กำลังในการเคลื่อนกลุ่มประจุปริมาตร dv : $dP = \vec{E}\cdot\left(\sum_i N_i q_i \vec{u}_i\right)dv$

จะได้ว่า $dP = \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv \Rightarrow \frac{dP}{dv} = \vec{E}\cdot\vec{J}$ Power density $[W/m^3]$

Joule's law : $\boxed{P = \int_v \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv}$ ≡ กำลังที่สูญเสียในปริมาตร v (Electric power → heat)

- **Power discipation in conductor** (พลังงานที่สูญเสียในตัวนำ)

- ที่ Steady state : $\vec{E}, \vec{J}$ คงที่
- $dv = ds\,d\ell$: $d\vec{\ell}$ ทิศเดียวกับ $\vec{J}, \vec{E}$; $d\vec{s}$ ตั้งฉากกับ $\vec{J}, \vec{E}$

$P = \int E d\ell \int J ds = \mathcal{V}\cdot I$

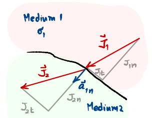
$$\boxed{P = \mathcal{V}I = I^2R}$$

* สังเกตว่า $R = \frac{\int\vec{E}\cdot\vec{J}dv}{I^2} = \frac{\int|\vec{J}|^2 dv}{\sigma I^2}$ *

Boundary Conditions

ในบริเวณที่มีไม่มี Nonconcervative energy sources

	Differencial form	Integral form
continuity eq.	$\nabla\cdot\vec{J} = 0$	$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0$
KVL	$\nabla\times\frac{\vec{J}}{\sigma} = 0$	$\oint\frac{1}{\sigma}\vec{J}\cdot d\vec{\ell} = 0$

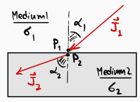


แนวตั้งฉาก : $\boxed{J_{1n} = J_{2n}}$

แนวเส้นสัมผัส : $\boxed{\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}}$

* หากมีประจุ ต้องพิจารณา Boundary Condition ของ $\vec{D}, \vec{E}$ ในบริเวณที่มีกระแส แม้จะไม่กำหนด ρ_s แต่ ρ_s อาจ $\neq 0$ *

(ex) Two conducting media with conductivities σ_1 and σ_2 are separated by an interface as shown in a figure. The steady current density in medium 1 at point P_1 has a magnitude J_1 and makes an angle α_1 with the normal. Determine magnitude and direction of current density at point P_2 in medium 2.



Sol^n จาก Boundary Conditions จะได้ว่า

$\vec{J}_{1n} = \vec{J}_{2n}$: $J_1\cos\alpha_1 = J_2\cos\alpha_2$ —(1)

$\frac{\vec{J}_{1t}}{\sigma_1} = \frac{\vec{J}_{2t}}{\sigma_2}$: $\frac{J_1\sin\alpha_1}{\sigma_1} = \frac{J_2\sin\alpha_2}{\sigma_2}$ —(2)

จาก (1), (2) จะได้ว่า $\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \longrightarrow \boxed{\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\tan\alpha_1\right)}$

$J_2 = \sqrt{J_{2n}^2 + J_{2t}^2} = \sqrt{(J_1\cos\alpha_1)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}J_1\sin\alpha_1\right)^2}$

$$\therefore \boxed{J_2 = J_1\left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sin\alpha_1\right)^2 + \cos^2\alpha_1\right]^{1/2}}$$

กรณีที่ $\sigma_2 \gg \sigma_1$ มากๆ α_2 จะเข้าใกล้ $90°$ นั่นคือ กระแสจะไหลที่ผิว #

Boundary condition for lossy dielectrics

ไม่มีกระแสผ่าน & ประจุ

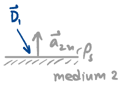
กระแส: $J_{1n} = J_{2n}$, $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$

ประจุ: $(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n})\cdot\vec{a}_{2n} = \rho_s$, $(\varepsilon_1\vec{E}_{1n} - \varepsilon_2\vec{E}_{2n})\cdot\vec{a}_{2n} = \rho_s$ — ประจุที่ผิวมีค่า $\vec{D}_1$

$\rho_s = \left(\varepsilon_1\vec{E}_{1n} - \varepsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\vec{E}_{1n}\right)\cdot\vec{a}_{2n}$

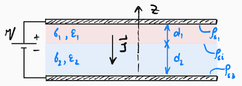
กรณีที่ $\sigma_2 \gg \sigma_1 \Rightarrow \rho_s \approx (\varepsilon_1\vec{E}_{1n})\cdot\vec{a}_n$

medium 2 เป็นตัวนำที่ดีกว่ามาก ($E_{2n} \approx 0$)



ex) An emf $\mathcal{V}$ is applied across a parallel plate capacitor of area S. The space between the conducting plates is filled with two lossy dielectrics of thicknesses d_1 and d_2, permittivities ε_1 and ε_2, and conductivities σ_1 and σ_2, respectively. Determine the current density between plates, the electric field in both dielectrics, and the surface charge densities on the plates and at the interface.

Sol^n



$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow I_1 = I_2 = I$:

อนุกรม: $\mathcal{V} = I(R_1 + R_2) = I\left(\frac{d_1}{\sigma_1 S} + \frac{d_2}{\sigma_2 S}\right)$

$J = \frac{I}{S} = \frac{\mathcal{V}}{\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{\sigma_1\sigma_2\mathcal{V}}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}(-\vec{a}_z)}$ [A/m²]

$\vec{J} = \sigma_1\vec{E}_1 = \sigma_2\vec{E}_2$

$\therefore \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma_2\mathcal{V}}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}(-\vec{a}_z)}$ [V/m]

$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\sigma_1\mathcal{V}}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}(-\vec{a}_z)}$ [V/m]

จาก $\rho_s = \varepsilon\vec{E}\cdot\vec{a}_n$ จะได้ว่า

$\vec{a}_n = -\vec{a}_z$: $\boxed{\rho_{s_1} = \frac{\varepsilon_1\sigma_2\mathcal{V}}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}}$ [C/m²]

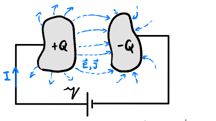
$\vec{a}_n = \vec{a}_z$: $\boxed{\rho_{s_2} = -\frac{\varepsilon_2\sigma_1\mathcal{V}}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}}$ [C/m²]

ที่รอยต่อระหว่างตัวกลาง $(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n})\cdot\vec{a}_{2n} = \rho_{si}$ $\therefore \boxed{\rho_{si} = \frac{(\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2)\mathcal{V}}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}}$ [C/m²]

** สังเกตว่า $\rho_{s_1} + \rho_{s_2} \neq 0$ แต่... $\rho_{s_1} + \rho_{s_2} + \rho_{si} = 0$

▸ Resistance Calculations

• ความสัมพันธ์ระหว่าง Resistance กับ Capacitance (Lossy Dielectrics)



(Two conductors in lossy dielectric medium)

$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint \vec{D}\cdot d\vec{s}}{-\int \vec{E}\cdot d\vec{l}} = \frac{\oint \varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{s}}{-\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}$

$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\oint \vec{J}\cdot d\vec{s}} = \frac{-\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\oint \sigma\vec{E}\cdot d\vec{s}}$

$\boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$

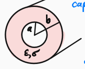
• วิธีคำนวณหาค่าความต้านทาน (Resistance)

Steps : **Resistance Calculation**

- ใช้ Joule's law: จาก $P = I^2R = \int \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv$; $R = \frac{\int \sigma|\vec{E}|^2 dv}{I^2}$; $R = \frac{\int \frac{1}{\sigma}|\vec{J}|^2 dv}{I^2}$
  * หา $\vec{J}, \vec{E}$ เพื่อ integrate
- ใช้นิยาม: $R = \frac{l}{\sigma S}$; l: เส้นทางที่กระแสไหล; S: พื้นที่หน้าตัดเส้นทาง; σ: conductivity ของวัสดุ
  - l, S, σ คงที่? ใช่ → $R = \frac{l}{\sigma S}$; ไม่ → แบ่งเป็น dR ที่ l, S, σ คงที่ แล้ว integrate
- ใช้ Continuity Eq: (Steady current) $\nabla\cdot\vec{J} = 0$; $\boxed{\nabla\cdot(\sigma\nabla V) = 0}$
  - กำหนด V_0 เป็น source → แก้ Laplace Eq → $\vec{J} = \sigma(-\nabla V)$ → $R = \frac{V_0}{I}$

ex) Find the leakage resistance per unit length between the inner and outer conductors of a coaxial cable that has inner conductivity σ, and of parallel-wire transmission line consisting of wires of radius a separated by a distance D in a medium with conductivity σ.

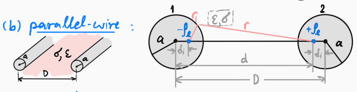
Sol^n (a) coaxial cable



capacitance per unit length: $C_l = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$

จาก $RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ จะได้ว่า resistance per unit length : $\boxed{R_l = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}}$

(b) parallel-wire :



หา C_l จากบทก่อน : ต้องเลือกแนว image charge เป็น line charge ประจุ $\pm\rho_l$

ระยะห่าง $D - 2d_i = d - d_i$: ที่ line 1 : $V_1 = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{\ominus 1}}{r} + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{\oplus 1}}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_i}{r}$

จากรูป $\frac{r_i}{r} = \frac{a}{d}$; $d_i = \frac{a^2}{d}$; $V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a}{d}$

ทำนองเดียวกัน ที่ line 2 : $V_2 = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a}{d}$

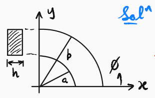
$C_l = \frac{\rho_l}{V_2 - V_1} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln(d/a)}$

$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \Rightarrow R_l = \frac{\ln(d/a)}{\pi\sigma}$

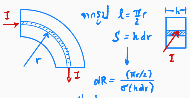
$d_i = D - d = D - \frac{a^2}{d}$ $\therefore d = \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}\right)$

$\therefore \boxed{R_l = \frac{1}{\pi\sigma}\ln\left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right]}$

ex) A conducting material of uniform thickness h and conductivity σ has a shape of a quarter of a flat circular washer, with inner radius a and outer radius b, as shown in a figure. Determine the resistance between the end faces.



Sol^n method I : หาโดยใช้นิยาม $R = \frac{l}{\sigma S}$



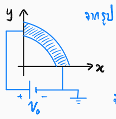
พิจารณา $l = \frac{\pi}{2}r$, $S = h\,dr$; $dR = \frac{(\pi r/2)}{\sigma(h\,dr)}$

พิจารณา $G = \frac{1}{R} \Rightarrow dG = \frac{2\sigma h\,dr}{\pi r}$

$G = \frac{2\sigma h}{\pi}\int_{r=a}^{r=b}\frac{1}{r}dr = \frac{2\sigma h}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ [S]

$\therefore \boxed{R = \frac{\pi}{2\sigma h\ln(b/a)}}$ [Ω]

method II : ใช้ Laplace eqn. $(\nabla^2 V = 0)$



จากรูป กำหนดให้ $V(\phi = \frac{\pi}{2}) = V_0$ —(1)

$V(\phi = 0) = 0$ —(2)

สังเกตว่าศักย์ไฟฟ้าแปรตาม ϕ เท่านั้น

ดังนั้น $\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$ {Cylindrical Coordinates}

จะได้ว่า $V = A\phi + B$ จาก (1) และ (2)

จะได้ว่า $V = \frac{2V_0}{\pi}\phi \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}V\right)\vec{a}_\phi = -\frac{2V_0}{\pi r}\vec{a}_\phi$

$\vec{J} = \sigma\vec{E} = -\frac{2\sigma V_0}{\pi r}\vec{a}_\phi$

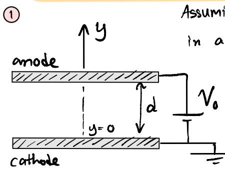
$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$ พิจารณา $d\vec{s} = -(h\,dr)\vec{a}_\phi$

จะได้ว่า $I = \int_a^b \frac{2\sigma V_0}{\pi r}h\,dr = \frac{2\sigma V_0}{\pi}h\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$R = \frac{V_0}{I}$ $\boxed{R = \frac{\pi}{2\sigma h\ln(b/a)}}$

Additional Problems

① Assuming S to be the area of the electrodes in the space-charge-limited vacuum diode in a figure, find



(a) $V(y)$, $E(y)$ within the interelectrode region,
(b) the total amount of charge in the interelectrode region,
(c) the total surface charge on the cathode and anode
(d) the transit time of an electron from the cathode to anode with $V_0 = 200$ V and $d = 1$ cm.

Sol^n (a) จากสมการคลื่อนที่ (จากโจทย์ในบท ex.)

$\frac{dV}{dy} = 2\sqrt{J}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}V^{-1/4}$

จะได้ว่า $\int_0^{V(y)} V^{1/4}dV = \int_0^y 2\sqrt{J}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}dy$

$\frac{4}{5}(V(y))^{5/4} = 2\sqrt{J}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}y$

$V(y) = \left(\frac{9J}{4\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}y^{4/3}$

แทนค่า $J = \frac{4\varepsilon_0}{9d^2}\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2}V_0^{3/2} \rightarrow \boxed{V(y) = V_0\left(\frac{y}{d}\right)^{4/3}}$

$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \boxed{\vec{E}(y) = -\frac{4V_0}{3d}\left(\frac{y}{d}\right)^{1/3}\vec{a}_y}$

(b) Gauss' law: $Q_{enc} = \oint \varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{s}$

$Q_{enc} = \varepsilon E_{side}(S_{side}) + \varepsilon E(y{=}0)(-S) + \varepsilon E(y{=}d)(S)$

↳ Q ทั้งหมดใน interelectrode region

$\therefore \boxed{Q_{total} = -\frac{4\varepsilon_0 V_0 S}{3d}}$ ← มีค่าลบ เพราะเป็น e⁻ ทั้งหมด

(c) $Q_{surface} = \rho_s S$, $\rho_s = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{a}_n$

• ที่ Cathode $(y=0)$ $\vec{a}_n = \vec{a}_y$, $\vec{E} = \vec{0}$ $\therefore \boxed{Q_{cathode} = 0}$

• ที่ Anode $(y=d)$ $\vec{a}_n = -\vec{a}_y$, $\vec{E} = -\frac{4V_0}{3d}\vec{a}_y$ $\therefore \boxed{Q_{anode} = \frac{4\varepsilon_0 V_0 S}{3d}}$

* สังเกตว่า ประจุรวมทั้งระบบเท่ากับ 0

(d) จาก $\frac{1}{2}mu^2 = eV$

จะได้ $u(y) = \sqrt{\frac{2eV(y)}{m}}$

$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\left(\frac{y}{d}\right)^{2/3}$

$\int_0^{t_{transit}} dt = \sqrt{\frac{m}{2eV_0}}\,d^{2/3}\int_0^d y^{-2/3}dy$

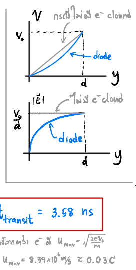
$t_{transit} = 3d\sqrt{\frac{m}{2eV_0}}$

แทนค่า $m = 9.109\times10^{-31}$ kg, $e = 1.602\times10^{-19}$ C, $V_0 = 200$ V, $d = 1\times10^{-2}$ m

$\boxed{t_{transit} = 3.58 \text{ ns}}$

* อัตราเร็ว e⁻ ที่ $u_{max} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$

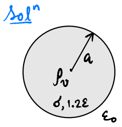
จะได้ $u_{max} = 8.39\times10^{6}$ m/s $\approx 0.03c$



② Lightning strikes a lossy dielectric sphere — $\varepsilon = 1.2\varepsilon_0$, $\sigma = 10$ S/m — of radius 0.1 m at time $t = 0$, depositing uniformly in the sphere a total charge 1 mC. Determine, for all t,

(a) the electric field intensity both inside and outside the sphere.
(b) the current density in the sphere.

Sol^n



(a) Gauss' law $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}/\varepsilon$ ⇒ $\vec{E} = \begin{cases}\frac{\rho_v R}{3(1.2\varepsilon_0)}\vec{a}_R, & R < a\\ \frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R, & R > a\end{cases}$

* ประจุรวมทั้งหมดไม่เปลี่ยน $(R > a) \Rightarrow Q_{enc} = Q_0 = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$

continuity eq: $\rho_v(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \rho_0 e^{-\frac{10}{1.2\varepsilon_0}t}$

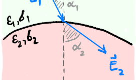
$\rho_0 = \frac{10^{-3}}{\frac{4}{3}\pi(0.1)^3}$ mC/m³ $= 23.87$ mC/m³

$\therefore \vec{E} = \begin{cases}\left[(7.49\times10^{6})Re^{-(9.41\times10^{11})t}\right]\vec{a}_R & \text{V/m}, R < 0.1\text{ m}\\ (8.99\times10^{6})\frac{1}{R^2}\vec{a}_R & \text{V/m}, R > 0.1\text{ m}\end{cases}$

* สังเกตว่าสนามภายนอกไม่ขึ้นกับเวลาที่เปลี่ยนไป

ความหนาแน่นกระแส : $\vec{J} = \sigma\vec{E}(R < 0.1\text{ m}) \rightsquigarrow \boxed{\vec{J}_{inside} = \left[(7.49\times10^{7})e^{-(9.41\times10^{11})t}\right]\vec{a}_R \text{ A/m}^2}$

③ Two lossy dielectric media with permittivities and conductivities $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ and $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ are in contact. An electric field with a magnitude E_1 is incident from medium 1 upon the interface at an angle α_1 measured from the common normal, as in a figure.



(a) Find the magnitude and direction of $\vec{E}_2$ in medium 2.
(b) Find the surface charge density at the interface.

Sol^n (a) Boundary condition :

$E_{1t} = E_{2t}$: $E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2$ —(1)

$J_{1n} = J_{2n}$: $\sigma_1E_1\cos\alpha_1 = \sigma_2E_2\cos\alpha_2$ —(2)

จาก (2), (1) ∴ $\boxed{\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\tan\alpha_1\right)}$

$\boxed{E_2 = E_1\sqrt{\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cos\alpha_1\right)^2}}$

ถ้าตัวกลางที่ 2 เป็น perfect dielectric $(\sigma_1, \sigma_2 = 0) \rightarrow \rho_s = 0$, $\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\alpha_1\right)$

$E_2 = E_1\sqrt{\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cos\alpha_1\right)^2}$

(b) : $(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n})\cdot\vec{a}_{2n} = \rho_s$; $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$

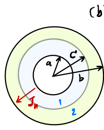
$\rho_s = \varepsilon_2E_{2n} - \varepsilon_1E_{1n}$

$\rho_s = \varepsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}E_{1n} - \varepsilon_1E_{1n}$

$\boxed{\rho_s = \left(\varepsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \varepsilon_1\right)E_1\cos\alpha_1}$

④ A d-c voltage V_0 is applied across a cylindrical capacitor length L. The radii of the inner and outer conductors are a and b, respectively. The space between the conductors is filled with two different lossy dielectrics having, respectively, permittivity ε_1 and conductivity σ_1 in region $a < r < c$, and permittivity ε_2 and conductivity σ_2 in the region $c < r < b$.

Determine (a) the current density in each region
(b) the surface charge densities on the inner and outer conductors



Sol^n (a) จาก รูป

$G_1 = \frac{2\pi\sigma_1L}{\ln(c/a)}$, $G_2 = \frac{2\pi\sigma_2L}{\ln(b/c)}$

อนุกรม: $G_{tot} = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2} = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2L}{\sigma_1\ln(b/c) + \sigma_2\ln(c/a)}$

$J_{1n} = J_{2n} = J_n \Rightarrow I = V_0G = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2LV_0}{\sigma_1\ln(b/c) + \sigma_2\ln(c/a)}$

$\vec{J}(R) = \frac{I}{2\pi rL}\vec{a}_r \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{\sigma_1\sigma_2V_0}{r\left(\sigma_1\ln\frac{b}{c} + \sigma_2\ln\frac{c}{a}\right)}\vec{a}_r}$ (A/m²)

(b) $\rho_s = \varepsilon\vec{E}\cdot\vec{a}_n = \frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{J}\cdot\vec{a}_n$

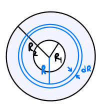
$\boxed{\rho_{sa} = \frac{\varepsilon_1\sigma_2V_0}{a\left(\sigma_1\ln\frac{b}{c} + \sigma_2\ln\frac{c}{a}\right)}}$

$\boxed{\rho_{sb} = \frac{-\varepsilon_2\sigma_1V_0}{b\left(\sigma_1\ln\frac{b}{c} + \sigma_2\ln\frac{c}{a}\right)}}$

ที่รอยต่อ $\rho_{sc} = D_{2n} - D_{1n}$ จะได้ว่า

$\boxed{\rho_{sc} = \frac{(\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2)V_0}{c\left(\sigma_1\ln\frac{b}{c} + \sigma_2\ln\frac{c}{a}\right)}}$

⑤ Determine the resistance between two concentric spherical surfaces of radii R_1 and R_2 $(R_1 < R_2)$, assuming that a material of conductivity $\sigma = \sigma_0(1 + k/R)$ fill the space between them. (Note: Laplace's equation for V does not apply here)

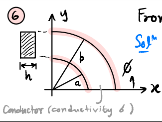


Sol^n $\mathcal{R} = \frac{l}{\sigma S} \Rightarrow$ พิจารณา $d\mathcal{R} = \frac{dR}{\sigma 4\pi R^2} = \frac{dR}{\sigma_0(1 + \frac{k}{R})4\pi R^2} = \frac{dR}{4\pi\sigma_0(R^2 + kR)}$

$\therefore \mathcal{R} = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R(R + k)} = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\frac{1}{k}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + k}\right)dR = \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\ln\frac{R_2(R_1 + k)}{R_1(R_2 + k)}$

$\boxed{\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\ln\frac{R_2(R_1 + k)}{R_1(R_2 + k)}}$

⑥ From the figure, find the resistance between the curved sides



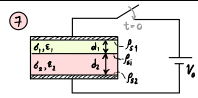
Conductor (conductivity σ)

Sol^n

$dR = \frac{dr}{\sigma\left(\frac{\pi r h}{2}\right)} \Rightarrow R = \frac{2}{\pi\sigma h}\int_a^b\frac{1}{r}dr \Rightarrow \boxed{R = \frac{2\ln(b/a)}{\pi\sigma h}}$

$S = \frac{1}{4}(2\pi r h)$

⑦



Continuity Equation for Transient State

ต้องการหาตัวแปร ตามเวลา $\rho_{si}(t)$ เมื่อ สับสวิตช์ที่เวลา $t = 0$

Sol^n ที่รอยต่อ $\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$\oint \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho_v\,dv$ (Divergence theorem)

$\oint \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint \rho_s\,ds$

$-J_{1n}S + J_{2n}S = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho_{si}\right)S$

$J_{1n} - J_{2n} = \frac{\partial\rho_{si}}{\partial t}$

$\sigma_1E_1 - \sigma_2E_2 = \frac{\partial\rho_{si}}{\partial t}$ —(1)

จาก $D_{2n} - D_{1n} = \rho_{si}$ จะได้ว่า

$\varepsilon_2E_2 - \varepsilon_1E_1 = \rho_{si}$ —(2)

จาก $V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$ จะได้ว่า

$V_0 = E_1d_1 + E_2d_2$ —(3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$\frac{\partial\rho_{si}}{\partial t} = -\frac{\sigma_1d_2 + \sigma_2d_1}{\varepsilon_1d_2 + \varepsilon_2d_1}\rho_{si} + \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2}{\varepsilon_1d_2 + \varepsilon_2d_1}V_0$

$\boxed{\rho_{si} = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1d_2 + \sigma_2d_1}V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

$\tau = \frac{\varepsilon_1d_2 + \varepsilon_2d_1}{\sigma_1d_2 + \sigma_2d_1}$