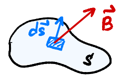
Magnetostatics

- Biot-Savart Law
- Ampère's Law
- Magnetic Potential & Dipole
- Magnetic fields in matter & Bounadary Conditions
- Inductances & Inductors
- Magnetic Energy
- Magnetic forces & torques

- **Magnetic Field Intensity** $\vec{H}$ [A/m]
- **Magnetic Flux Density** $\vec{B} = \mu\vec{H}$ [T] → Magnetic Flux : $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$ [Wb]



μ : Permeability (μ)

Permeability of free space : $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m

Revise...

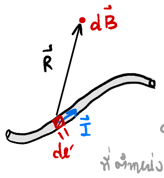
$\vec{a}_x \to \vec{a}_y \to \vec{a}_z$

$\vec{a}_r \to \vec{a}_\phi \to \vec{a}_z$

$\vec{a}_R \to \vec{a}_\theta \to \vec{a}_\phi$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \vec{a}_{u_1}h_1 & \vec{a}_{u_2}h_2 & \vec{a}_{u_3}h_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1A_{u_1} & h_2A_{u_2} & h_3A_{u_3}\end{vmatrix}$$

▸ Biot-Savart law



พิจารณา circuit element ต่างๆ
- line current : $I d\vec{l}$ [A·m]
- Surface current : $\vec{K}_s d\vec{s}$ [A·m]
- volume current : $\vec{J} dv$ [A·m]

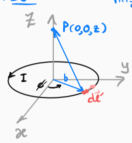
circuit element จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก

ที่ตำแหน่ง $\vec{R}$ จาก element : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 (\text{current element})\times\vec{a}_R}{4\pi R^2}$

กรณี line current : $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}'\times\vec{a}_R}{R^2}}$ [T]

ex Find the magnetic flux density at a point on the axis of a circular loop of radius b that carries a direct current I.

Sol^n



จากรูป $d\vec{l}' = b\,d\phi'\,\vec{a}_\phi$, $\vec{R} = z\vec{a}_z - b\vec{a}_r$

$$d\vec{l}'\times\vec{R} = \begin{vmatrix}\vec{a}_r & \vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ 0 & b\,d\phi' & 0 \\ -b & 0 & z\end{vmatrix}$$

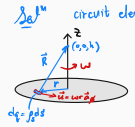
$d\vec{l}'\times\vec{R} = zb\,d\phi'\vec{a}_r + b^2 d\phi'\vec{a}_z$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}'\times\vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{zb\,d\phi'\vec{a}_r + b^2 d\phi'\vec{a}_z}{(z^2+b^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overbrace{zb\vec{a}_r}^{\text{สมมาตร}} + b^2\vec{a}_z}{(z^2+b^2)^{3/2}}d\phi' = \boxed{\frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}\vec{a}_z} \text{ [T]}$$

ex Find the magnetic flux density at a point on the axis of a circular disk of radius b that carries a surface charge density ρ_s, the disk rotates with an angular velocity of ω (CCW).

Sol^n circuit element : $\vec{K}_s ds = \rho_s\vec{u}\,ds = \rho_s\omega r\vec{a}_\phi\,r\,dr\,d\phi$



$\vec{R} = z\vec{a}_z - r\vec{a}_r$

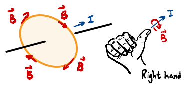
$\vec{K}_s ds\times\vec{R} = \rho_s\omega r^2 z\,dr\,d\phi\,\vec{a}_r + \rho_s\omega r^3\,dr\,d\phi\,\vec{a}_z$

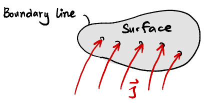
สมมาตร : แกน $\vec{a}_r \to 0$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^b\frac{\rho_s\omega r^3\,dr\,d\phi}{(h^2+r^2)^{3/2}}\vec{a}_z = \boxed{\frac{\mu_0\rho_s\omega h}{2}\left(\frac{2b^2+h^2}{b\sqrt{b^2+h^2}} - 2\right)\vec{a}_z} \text{ [T]}$$

▸ Ampère's law

$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$ ⟶ $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$





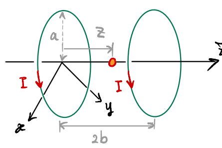
$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$ $\xrightarrow{\int(\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{s} = \mu_0\int\vec{J}\cdot d\vec{s}}$ $\boxed{\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}}$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

I_{enc} : กระแสไฟฟ้าที่ผ่านบริเวณของ Amperion loop

$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}$: line integral ตามรอบของ Amperion loop

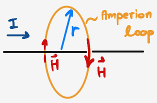
↳ Helmholtz's Coil



$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_{left} + \vec{B}_{right} = \frac{\mu_0 I a^2\vec{a}_z}{2(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I a^2\vec{a}_z}{2[(2b-z)^2+a^2]}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((2b-z)^2+a^2)^{3/2}}\right\}\vec{a}_z}$$

Long straight line

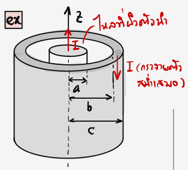


$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = H(2\pi r) = I$

$H = \frac{I}{2\pi r}$ (หมุนรอบ I) $\vec{H}\circlearrowright I$

Coaxial line → แบ่งช่วงคิด

ex



$r<a$: $I_{enc} = 0$ ∴ $\vec{H} = \vec{0}$

$a<r<b$: $I_{enc} = I$ ∴ $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{a}_\phi$

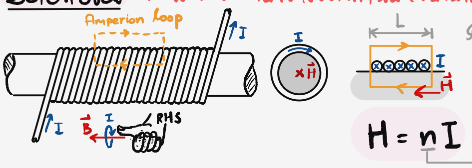
$b<r<c$: $I_{enc} = I - I\left(\frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(c^2-b^2)}\right) = I\left\{\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right\}$

∴ $\vec{H} = \frac{I(c^2-r^2)}{2\pi r(c^2-b^2)}\vec{a}_\phi$

$r>c$: $I_{enc} = 0$ ∴ $\vec{H} = \vec{0}$

$$\vec{H} = \begin{cases}\frac{I}{2\pi r}\vec{a}_\phi, & a<r<b \\ \frac{I(c^2-r^2)}{2\pi r(c^2-b^2)}\vec{a}_\phi, & b<r<c \\ \vec{0}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Solenoid : มี $\vec{H}$ ภายในขดลวดเท่านั้น (ขนานไปกับแกน)



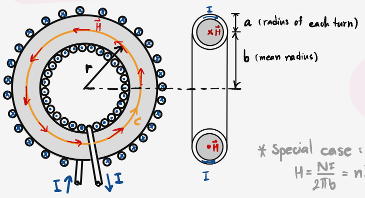
$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$

$HL = nLI$

$H = nI$; n : จำนวนขดลวดต่อความยาว

$$H = nI$$

Toroid → มี $\vec{H}$ เฉพาะบริเวณที่ขดลวดพันรอบ



สำหรับ $b-a<r<b+a$

$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = H(2\pi r) = NI$

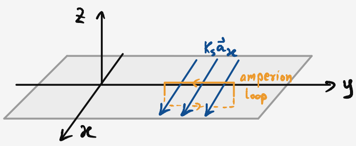
$H = \frac{NI}{2\pi r}$; NI : จำนวนขดลวดที่พันรอบทั้งหมด

* Special case : กรณีที่ $b\gg a$: $r\approx b$

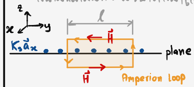
$H = \frac{NI}{2\pi b} = nI$ (เหมือนกับ Solenoid)

Infinite sheet of current

ex พิจารณากรณี uniform surface current : $\vec{K}_s = K_s\vec{a}_x$



สนามแม่เหล็กจะมีขนาดสม่ำเสมอขนานกับผิว (ทิศทางตาม RHS)



จากรูป

$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = (-H\vec{a}_y)\cdot(-l\vec{a}_y) + (H\vec{a}_y)\cdot(l\vec{a}_y)$

$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = 2Hl$

$I_{enc} = K_s l$

∴ $H = \frac{K_s}{2}$ ∎

$$\vec{H} = \begin{cases}-\frac{1}{2}K_s\vec{a}_y, & z>0 \\ \frac{1}{2}K_s\vec{a}_y, & z<0\end{cases}$$

Vector Magnetic Potential

$$\boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$$

vector magnetic potential [Wb/m]

Ampère's law : $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0\vec{J}$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$

$\nabla\cdot\vec{A} = 0$ ($\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0$)

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$$

$\nabla^2\vec{A} = \vec{a}_x\nabla A_x + \vec{a}_y\nabla A_y + \vec{a}_z\nabla A_z$

$\vec{J}\to\vec{0}$ ($R\to\infty$)

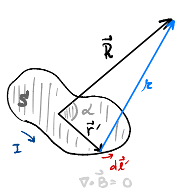
$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}}{R}dv}$$

↗ $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I d\vec{l}'}{R}$

↘ $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}_s ds}{R}$

• Magnetic dipole

Multipole expansion of the vector potential



จากรูป (กรณีที่ $R\gg r'$) พิจารณา Power series

$$\frac{1}{\mathscr{R}} = (R^2 + (r')^2 - 2Rr'\cos\alpha)^{-1/2} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{R}\right)^n P_n\cos\alpha$$

จะได้ว่า $\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{1}{\mathscr{R}}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\oint(r')^n P_n\cos\alpha\,d\vec{l}'$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\underbrace{\frac{1}{R}\oint d\vec{l}'}_{\text{monopole term}} + \underbrace{\frac{1}{R^2}\oint r'\cos\alpha\,d\vec{l}'}_{\text{dipole term}} + \underbrace{\frac{1}{R^3}\oint(r')^2\left(\frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\,d\vec{l}'\right)}_{\text{quadrupole term}} + \dots\right]$$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

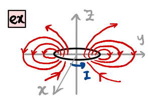
เนื่องจาก $\oint d\vec{l} = 0$ และ เหลือเพียง dipole : $\vec{A}_{dipole} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint r'\cos\alpha\,d\vec{l}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint(\vec{a}_R\cdot\vec{r}')\,d\vec{l}'$

$\oint(\vec{a}_R\cdot\vec{r}')\,d\vec{l}' = -\vec{a}_R\times\int d\vec{s}'$ ⟶ $\boxed{\vec{A}_{dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{a}_R}{R^2}}$, $m \equiv I\int d\vec{s} = I\vec{s}$ ★★

m : magnetic dipole moment [Am²]

$\vec{s}$: vector area ของ current loop

ex



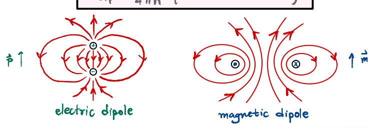
พิจารณาขดลวดวงกลมรัศมี b มีกระแส I ทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป

- magnetic dipole moment : $\vec{m} = I\pi b^2\vec{a}_z = m\vec{a}_z$
- vector magnetic potential : $\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0\vec{m}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2}$

$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 m(\cos\theta\vec{a}_R - \sin\theta\vec{a}_\theta)\times\vec{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 m\sin\theta}{4\pi R^2}\vec{a}_\phi$

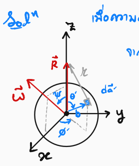
- Magnetic flux density : $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

$$\therefore \boxed{\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left\{2\cos\theta\,\vec{a}_R + \sin\theta\,\vec{a}_\theta\right\}}$$



ex A spherical shell of radius b, carrying a uniform surface charge ρ_s, is set spinning at angular velocity $\vec{\omega}$. Find the vector potential it produces at point $\vec{R}$.

Sol^n เพื่อความง่ายให้ $\vec{R}$ อยู่ในแนวแกน z



จากรูป $\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}_s}{\mathscr{R}}ds'$

โดยที่ $\mathscr{R} = \sqrt{b^2+R^2-2Rb\cos\theta'}$

$ds' = b^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$

และ $\vec{K}_s = \rho_s\vec{u}$ ซึ่ง

$$\vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \omega\sin\psi & 0 & \omega\cos\psi \\ b\sin\theta'\cos\phi' & b\sin\theta'\sin\phi' & b\cos\theta'\end{vmatrix}$$

จะได้ว่า $\vec{u} = \omega b[-(\cos\psi\sin\theta'\sin\phi')\vec{a}_x + (\cos\psi\sin\theta'\cos\phi' - \sin\psi\cos\theta')\vec{a}_y + (\sin\psi\sin\theta'\sin\phi')\vec{a}_z]$

เนื่องจาก $\int_0^{2\pi}\sin\phi'\,d\phi' = 0$ และ $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\,d\phi' = 0$ จะได้ว่า

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_s\omega b(-\sin\psi\cos\theta')}{\sqrt{b^2+R^2-2Rb\cos\theta'}}b^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi\;\vec{a}_y$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 b^3\rho_s\omega\sin\psi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'\sin\theta'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta'}}d\theta'(\vec{a}_y)$$

ให้ $u = \cos\theta'$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{u}{\sqrt{R^2+b^2-2Rbu}}du = -\frac{(R^2+b^2+Rbu)}{3R^2b^2}\sqrt{R^2+b^2-2Rbu}\Big|_{u=-1}^{u=1}$$

$= -\frac{1}{3R^2b^2}[(R^2+b^2+Rb)|R-b| - (R^2+b^2-Rb)(R+b)]$

ซึ่งคือ $= \begin{cases}\frac{2R}{3b^2} & \text{เมื่อ } R<b \\ \frac{2b}{3R^2} & \text{เมื่อ } R>b\end{cases}$

$$\therefore \vec{A} = \begin{cases}-\frac{\mu_0 b\rho_s\omega R\sin\psi}{3}\vec{a}_y \\ -\frac{\mu_0 b^4\rho_s\omega\sin\psi}{3R^2}\vec{a}_y\end{cases}$$

เนื่องจาก $\vec{\omega}\times\vec{R} = -\omega R\sin\psi\,\vec{a}_y$

$$\therefore \boxed{\vec{A}(\vec{R}) = \begin{cases}\frac{\mu_0 b\rho_s}{3}(\vec{\omega}\times\vec{R}), & R<b \\ \frac{\mu_0 b^4\rho_s}{3R^3}(\vec{\omega}\times\vec{R}), & R>b\end{cases}}$$

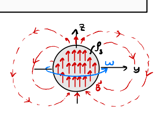
กรณี $\vec{\omega}$ อยู่ในแนวแกน z ($\vec{\omega} = \omega\vec{a}_z$)

$$\vec{A}(r,\theta,\phi) = \begin{cases}\frac{\mu_0 b\omega\rho_s}{3}R\sin\theta\,\vec{a}_\phi, & R\le b \\ \frac{\mu_0 b^4\omega\rho_s}{3}\frac{\sin\theta}{R^2}\vec{a}_\phi, & R\ge b\end{cases} \xrightarrow{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}} \vec{B} = \begin{cases}\frac{2}{3}\mu_0\rho_s b\vec{\omega}, & R<b \\ \frac{1}{3}\frac{\mu_0\rho_s b^4\omega}{R^3}(2\cos\theta\,\vec{a}_R + \sin\theta\,\vec{a}_\theta), & R\ge b\end{cases}$$

$\frac{2\mu_0 b\omega\rho_s}{3}(\cos\theta\,\vec{a}_R - \sin\theta\,\vec{a}_\theta) = \frac{2}{3}\mu_0\rho_s b\omega\vec{a}_z$

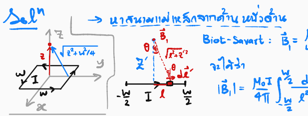
← ภายในทรงกลม : $\vec{B}$ คงที่

↑ คล้ายกับ $\vec{B}_{dipole}$



ex Find the exact magnetic field a distance z above the center of a square loop of side w, carrying a current I. Verify that it reduces to the field of a dipole with the appropriate dipole moment, when $z\gg w$.

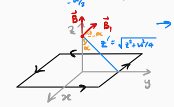
Sol^n → นำสนามแม่เหล็กจากด้านหนึ่งด้าน



Biot-Savart : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}\times\vec{a}_{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^2}$

จะได้ว่า $|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-w/2}^{w/2}\frac{dl\cos\theta}{l^2+z'^2}$

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-w/2}^{w/2}\frac{z'}{(l^2+z'^2)^{3/2}}dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{l}{z'\sqrt{l^2+z'^2}}\right]_{l=-w/2}^{l=w/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z'}\frac{w}{\sqrt{z'^2+w^2/4}}$$



→ รวม 4 ด้าน : จากความสมมาตรจะได้

$$\vec{B} = 4\times\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{w\sin\alpha}{\sqrt{z^2+w^2/4}\sqrt{z^2+w^2/4+w^2/4}}\vec{a}_z$$

โดยที่ $\sin\alpha = \frac{w/2}{\sqrt{z^2+w^2/4}}$

$$\therefore \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I w^2}{2\pi}\frac{1}{(z^2+\frac{w^2}{4})\sqrt{z^2+w^2/2}}\vec{a}_z}$$

กรณี $z\gg w$:

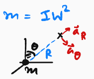
$(z^2+\frac{w^2}{4}) = z^2(1+\frac{w^2}{4z^2})\approx z^2$

$\sqrt{z^2+\frac{w^2}{2}} = z\sqrt{1+w^2/2z^2}\approx z$

$\vec{B}\approx\frac{\mu_0 I w^2}{2\pi z^3}\vec{a}_z$ —(*)

พิจารณา magnetic dipole moment : $m = Iw^2$

จาก $\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(2\cos\theta\,\vec{a}_R + \sin\theta\,\vec{a}_\theta)$



กรณีนี้ : $\theta = 0$, $\vec{a}_R\to\vec{a}_z$ จะได้ว่า

$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 I w^2}{2\pi z^3}\vec{a}_z$ —(**) พบว่า $\boxed{\vec{B}_{z\gg w} = \vec{B}_{dip}}$ ∎

Scalar Magnetic Potential

ในบริเวณที่ไม่มีกระแส (current-free region : $\vec{J}=\vec{0}$)

$\nabla\times\vec{B}=\vec{0} \longrightarrow \vec{B}=-\mu_0\nabla V_m$ — scalar magnetic potential [A]

Scalar magnetic potential difference

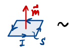
$$V_{m2}-V_{m1}=-\int_{P_1}^{P_2}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

* สมมติว่าในปริมาตร v' มี magnetic "charge" density ρ_m [A/m²] จะได้ว่า $V_m=\frac{1}{4\pi}\int_{v'}\frac{\rho_m}{R}dv'$

** ในความเป็นจริงนั้นไม่มี magnetic charges (ไม่มี magnetic monopole) → เป็นการ "สมมติ" ขึ้นมาเพื่อการคำนวณ **

พิจารณา magnetic dipole ซึ่งเสมือนว่ามี magnetic charge $\pm q_m$ ห่างกันเท่ากับ d

$\boxed{\vec{m}=q_m\vec{d}=IS\vec{a}_n}$ คล้ายกันกับใน electrostatics $V=\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ → $\boxed{V_m=\frac{\vec{m}\cdot\vec{a}_R}{4\pi R^2}}$ → $\vec{B}=-\mu_0\nabla V_m$



ช่วยในการหาสนามแม่เหล็กได้ง่ายขึ้น (หากไม่เป็นไปตามที่สามารถพิจารณาเป็น magnetic dipole ได้)

▸ Magnetic fields in matter

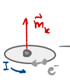
ภายในอะตอมของสาร e^- จะหมุนรอบนิวเคลียส → ทำให้เกิด magnetic dipole moment ($\vec{m}_k$)

โดยทั่วไป $\vec{m}_k$ จะมีทิศทางสุ่มๆ ส่งผลให้ไม่มี dipole moment ลัพธ์ แต่เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอก จะทำให้เกิดการจัดเรียงใหม่ → บรรยายสภาวะของ magnetic polarization โดย

Magnetization [A/m] ≡ magnetic dipole moment per volume

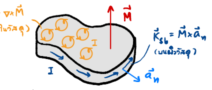
$$\vec{M}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v}\vec{m}_k}{\Delta v}$$

n atoms per unit volume; $\vec{m}_k$ — magnetic dipole moment ของแต่ละอะตอม



$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{a}_R}{R^2}dv'$, $dV_m=\frac{\vec{M}\cdot\vec{a}_R}{4\pi R^2}dv'$

กระแสที่เกิดจาก Magnetization



$\vec{J}_b=\nabla\times\vec{M}$ (ภายในวัสดุ), $\vec{K}_{sb}=\vec{M}\times\vec{a}_n$ (บนพื้นผิว)

• "Bound" volume current density: $\vec{J}_b=\nabla\times\vec{M}$ (เมื่อ $\vec{J}_b$)

• "Bound" surface current density: $\vec{K}_{sb}=\vec{M}\times\vec{a}_n$ (เมื่อ $\vec{J}_{sb}$)

** Proof: คล้ายๆกับ bound charge ใน dielectric $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{\vec{K}_{sb}}{R}ds'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}_b}{R}dv'$

Equivalent magnetization "charge" densities

• "Bound" surface charge: $\rho_{mbs}=\vec{M}\cdot\vec{a}_n$

• "Bound" volume charge: $\rho_{mbv}=-\nabla\cdot\vec{M}$

คล้ายๆในเรื่อง dielectrics

Magnetization นั้นทำให้เกิด $\vec{J}=\nabla\times\vec{B}$ เมื่อพิจารณากระแสทั้งหมด จะได้ว่า

free current: $\vec{J}=\vec{J}_f+\vec{J}_b$

Ampère's law: $\nabla\times\frac{1}{\mu_0}\vec{B}=\vec{J}_f+(\nabla\times\vec{M})$

$\vec{J}_f=\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right) \xrightarrow{\text{นิยาม}} \boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f}$

$$\boxed{\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}}$$

Magnetic field intensity [A/m]

สำหรับ linear medium

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ — χ_m: Magnetic susceptibility; $\vec{H}$: External magnetic field intensity

$$\vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}=\mu_0\mu_r\vec{H}$$

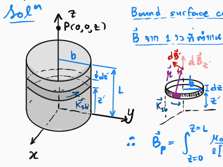
relative permeability $\mu_r=1+\chi_m$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

Example

(ex) Determine the magnetic flux density on the axis of a uniformly magnetized circular cylinder of a magnetic material. The cylinder has a radius b, length L, and axial magnetization $\vec{M}=M_0\vec{a}_z$ → M_0 is constant ∴ $\vec{J}_b=\nabla\times\vec{M}=\vec{0}$

Sol^n Bound surface current: $\vec{K}_{sb}=\vec{M}\times\vec{a}_n=M_0\vec{a}_z\times\vec{a}_r=M_0\vec{a}_\phi$



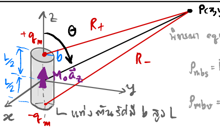
ใช้ B จาก loop วงกลมที่คำนวณไว้ที่ z':

$d\vec{B}_P=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(K_{sb}dz')bd\phi'}{[(z-z')^2+b^2]^{3/2}}\vec{a}_z$ (เพื่อบอกสนามตามแกน z เพราะทางแกนรัศมีหักล้างกัน)

$d\vec{B}_P=\frac{\mu_0M_0b^2dz'}{2[(z-z')^2+b^2]^{3/2}}\vec{a}_z$

∴ $\vec{B}_P=\int_{z'=0}^{L}\frac{\mu_0M_0b^2dz'}{2[(z-z')^2+b^2]^{3/2}}\vec{a}_z$

$$\boxed{\frac{\mu_0M_0}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+b^2}}\right]\vec{a}_z}$$



พิจารณา equivalent charge: $\rho_{mbs}=\vec{M}\cdot\vec{a}_n=\begin{cases}+M_0 & \text{(top)}\\ -M_0 & \text{(bottom)}\\ 0 & \text{(side)}\end{cases}$, $\rho_{mbv}=-\nabla\cdot\vec{M}=0$

ถ้า ห่างจากกันไกล L / แท่งสั้นถ้า $b\gg L$

ซึ่งคือ $q_m=\pi b^2(\rho_{mbs})=\pi b^2M_0$

ที่ $P(x,y,z)$: $V_m=\frac{q_m}{4\pi}\left(\frac{1}{R_+}-\frac{1}{R_-}\right)$

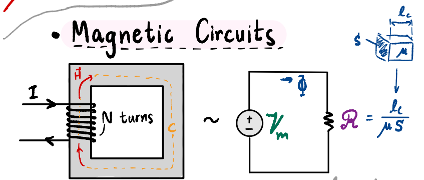
แล้ว $R\gg b$: $V_m=\frac{(\pi b^2M_0)L\cos\theta}{4\pi R^2}$

$\vec{B}=-\mu_0\nabla V_m=\frac{\mu_0 b^2LM_0}{4\pi R^3}(2\cos\theta\vec{a}_R+\sin\theta\vec{a}_\theta)$

Analogous relations between electrostatic and magnetostatic quantities.

Electrostatics	Magnetostatics
$\vec{E}$	$\vec{B}$
$\vec{D}$	$\vec{H}$
ε	$1/\mu$
$\vec{P}$	$-\vec{M}$
ρ	$\vec{J}$
V	$\vec{A}$
$\cdot$	$\times$
$\times$	$\cdot$

• Magnetic Circuits



สามารถพิจารณาสนามแม่เหล็กเป็นวงจรแม่เหล็กได้ดังนี้

Ampère's circuital law; magnetic flux [Wb]; Reluctance $[H^{-1}]$

$$\oint_c\vec{H}\cdot d\vec{l}=NI=V_m=\Phi\mathcal{R}$$

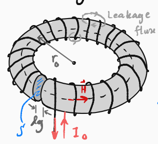
NI: จำนวนรอบของขดลวดที่มีกระแส I; V_m: magnetomotive force mmf [A·turns]; $\mathcal{R}=\frac{l_c}{\mu S}$: เหมือน R ในวงจรไฟฟ้า

"KVL" และ "KCL" similarity ของ magnetic circuit

$$\boxed{\sum_j N_jI_j=\sum_k\Phi_k\mathcal{R}_k}\qquad\boxed{\sum_j\Phi_j=0}$$

Example

(ex) Assume that N turns of wire are wound around a toroidal core of a ferromagnetic material with permeability μ. The core has a mean radius r_o, a circular cross section of radius a ($a\ll r_o$), and a narrow air gap of length l_g, as shown in a figure. A steady current I_0 flows in the wire. Determine (a) the magnetic flux density, $\vec{B}_f$, in a ferromagnetic core; (b) the magnetic field intensity, $\vec{H}_f$, in the core; and (c) the magnetic field intensity, $\vec{H}_g$ in the air gap.



Sol^n method i: ใช้ Ampère's law

Neglect leakage flux: Φ ที่ผ่านทุกส่วนเท่ากัน ⇒ $\vec{B}_f=\vec{B}_g=B_f\vec{a}_\phi$

จะได้ว่า $\vec{H}_f=\frac{1}{\mu}B_f\vec{a}_\phi$ และ $\vec{H}_g=\frac{1}{\mu_0}B_f\vec{a}_\phi$

จาก Ampère's law: $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=NI_0$ จะได้ว่า

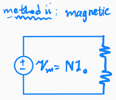
$\frac{B_f}{\mu}(2\pi r_o-l_g)+\frac{B_f}{\mu_0}l_g=NI_0$

∴ $\boxed{\vec{B}_f=\frac{\mu_0\mu NI_0}{\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g}\vec{a}_\phi}$ (a)

$\boxed{\vec{H}_f=\frac{\mu_0NI_0}{\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g}\vec{a}_\phi}$ (b)

$\boxed{\vec{H}_g=\frac{\mu NI_0}{\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g}\vec{a}_\phi}$ (c)

method ii: magnetic circuit



$V_m=NI_0$, $\mathcal{R}_f=\frac{2\pi r_o-l_g}{\mu S}$, $\mathcal{R}_g=\frac{l_g}{\mu_0 S}$

$V_m=\Phi(\mathcal{R}_f+\mathcal{R}_g)$

$\Phi=\frac{\mu\mu_0NI_0}{S[\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g]}$

$B_f\approx\Phi/S$ (เมื่อ $a\ll r_o$)

∴ $\boxed{\vec{B}_f=\frac{\mu_0\mu NI_0}{\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g}\vec{a}_\phi}$ (a)

จาก $\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$ จะได้ว่า

$\boxed{\vec{H}_f=\frac{\mu_0NI_0}{\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g}\vec{a}_\phi}$

$\boxed{\vec{H}_g=\frac{\mu NI_0}{\mu_0 2\pi r_o+(\mu-\mu_0)l_g}\vec{a}_\phi}$

• Behavior of magnetic materials

- Diamagnetic : $\mu_r\lesssim1$ (χ_m เป็นค่าลบน้อยๆ)
- Paramagnetic : $\mu_r\gtrsim1$ (χ_m เป็นค่าบวกน้อยๆ)
- Ferromagnetic : $\mu_r\gg1$ (χ_m เป็นค่าบวกมากๆ)

Diamagnetism : ในสารที่ magnetic moment ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของ e^- ลัพธ์เท่ากับศูนย์ (มีการจัดเรียง e^- เต็ม shell) เมื่อมีสนามแม่เหล็กจากภายนอกมารบกวนการเคลื่อนของ e^- ส่งผลให้เกิด induced magnetic moment ขึ้นในทิศตรงข้าม (ตาม Lenz's law) นั่นคือ χ_m มีค่าเป็นลบน้อยๆ (ระดับ -10^{-5}) เป็นปรากฏการณ์ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ และ $\vec{m}_{induced}$ จะหายไปเมื่อไม่มีสนามภายนอก

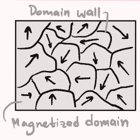
└ ตัวอย่างวัสดุ : bismuth, copper, lead, mercury, germanium, gold, diamond

Paramagnetism → ในสารที่มี magnetic moment ไม่หักล้างกันหมด เมื่อมีสนามแม่เหล็กจากภายนอกจะเกิด diamagnetic effect น้อยๆ และทำให้ molecular magnetic moment เรียงตัวในแนวเดียวกับ H_{ext} ส่งผลให้สนามแม่เหล็กภายในตัวสารมีค่ามากขึ้นเล็กน้อย นั่นคือ χ_m มีค่าเป็นบวกน้อยๆ (ระดับ 10^{-5}) เนื่องจาก molecular magnetic moment นั้นถูกรบกวนโดย thermal vibration ดังนั้นที่อุณหภูมิต่ำผลของ paramagnetism จะมีมากขึ้น

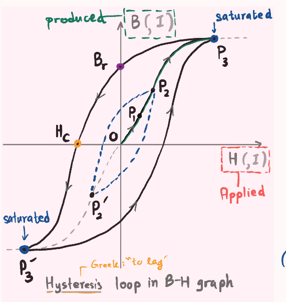
└ ตัวอย่างวัสดุ : aluminium, magnesium, titanium, tungsten

Ferromagnetism : ใน ferromagnetic materials (eg. cobalt, nickel, iron) จะมี magnetized domain ที่ปกติจะมีทิศทางแบบสุ่มจนหักล้างกันหมด เมื่อมีสนามจากภายนอก จะเกิดการจัดเรียงตัวของโดเมนจนเกิด $\vec{M}$ ส่งผลให้ $\vec{B}$ ภายในสารแม่เหล็กเพิ่มขึ้น

└ Domain-wall motion



▸ พฤติกรรมของสาร Ferromagnetic เมื่อมี H_{ext}



เมื่อมี $\vec{H}$ (หรือ I) จากภายนอก จะเกิด $\vec{B}$ ภายในวัสดุ เมื่อเพิ่ม $\vec{H}$, $\vec{B}$ ก็จะเพิ่มขึ้นด้วย ($\vec{B}=\mu_r\mu_0\vec{H}$) ในช่วงแรกที่ $\vec{H}$ น้อยๆ การจัดเรียงของ domain จะผันกลับได้ (ถ้าลด $\vec{H}$, $\vec{B}$ ก็ลดลงตามเส้นทางเดิม)

เมื่อ $\vec{H}$ มากขึ้น (เกิน P_1) domain จะไม่สามารถผันกลับได้ (ถ้าลด $\vec{H}$, $\vec{B}$ จะไม่ลดลงตาม P_1P_0 แต่จะลดตาม P_1P_1')

ปรากฏการณ์ที่ $\vec{M}$ ไม่ลดลงตาม $\vec{H}$ เรียกว่า hysteresis

เมื่อ $\vec{H}$ เพิ่มขึ้นเรื่อยๆจะถึงจุดที่ทั้งวัสดุมี domain เดียว (saturated) เรียก $OP_1P_2P_3$ ว่า normal magnetization curve

หากลด $\vec{H}$ ลงจาก P_3 เมื่อ $H=0$ พบว่ายังคงมี $B=B_r$ (residual หรือ remanent flux density : B_r)

หากจะทำให้ $B=0$ ต้องมี $H=H_c$ (coercive field intensity : H_c) ในทิศตรงข้าม

** อุณหภูมิสูงจะรบกวน $\vec{M}$ ภายในวัสดุ หากสูงจนถึง curie temperature (เหล็ก ≈ 770°C) สาร ferromagnetic จะมีพฤติกรรมแบบ สาร paramagnetic **

ใน generator, motor, transformer $\vec{H}$ จะเปลี่ยนแปลงแบบมีคาบ ซึ่งส่งผลให้เกิด hysteresis loop ภายในสารแม่เหล็ก ทำให้เกิด hysteresis loss (สูญเสียพลังงาน)

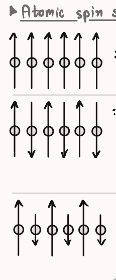
โดย u_{loss} = พื้นที่ของ hysteresis loop

energy loss per unit volume [J/m³]

• "Soft" materials → dislocations, impurities น้อย (well-annealed) domain-wall ขยับง่าย → loss ต่ำ

• "Hard" materials → H_c, B_r สูงมาก → loop ใหญ่ (eg. Alnico) └ Good permanent magnet

▸ Atomic spin structure

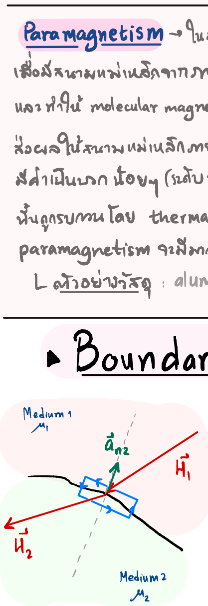


: Ferromagnetic

: Antiferromagnetic — มีคู่สปินตรงข้าม → $M_{net}=0$; เมื่ออุณหภูมิเกิน curie temp → กลายเป็น paramagnetic; eg : chromium, manganese

: Ferrimagnetic — มีสปินตรงข้ามแต่ไม่เท่ากัน → B น้อยลง; Ferrites eg. magnetic spinnels (XO·Fe₂O₃, X → Fe, Co, Ni, Mn, Mg); มี loss ต่ำ → ใช้ในอุปกรณ์ความถี่สูง เช่น Antenna, computer; "anistropic"

▸ Boundary Conditions



$\oint$ ต่อเนื่อง → $\boxed{B_{1n}=B_{2n}}$

$\boxed{\mu_1H_{1n}=\mu_2H_{2n}}$ } แนวจาก ทีนี้

$\oint_c\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_{enc}$ → $H_1-H_2=K_{sf}$

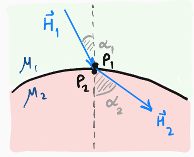
$$\boxed{\vec{a}_{n2}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{K}_{sf}}$$

$\vec{a}_{n2}$: ชี้ออกจาก medium 2; $\vec{K}_{sf}$: กระแสผิวบนรอยต่อ "free current"

} ถ้าการรอยต่อของไม่เป็น perfect conductor → $\vec{K}_{sf}=\vec{0}$ → $H_{1t}=H_{2t}$

Example

(ex) Two magnetic media with permeabilities μ_1 and μ_2 have a common boundary as shown in a figure. The magnetic field intensity in medium 1 at the point P_1 has a magnetude H_1 and makes an angle α_1 with the normal. Determine the magnetude and the direction of magnetic field intensity at point P_2 in medium 2.



Sol^n พิจารณา Boundary condition

$\mu_1H_{1n}=\mu_2H_{2n}$ → $\mu_1H_1\cos\alpha_1=\mu_2H_2\cos\alpha_2$ — (1)

เนื่องจาก medium 1 และ medium 2 ไม่เป็น perfect conductor

จะได้ว่า $H_{1t}=H_{2t}$ → $H_1\sin\alpha_1=H_2\sin\alpha_2$ — (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\boxed{\alpha_2=\tan^{-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\alpha_1\right)}$

จาก $H_2=\sqrt{H_{2t}^2+H_{2n}^2}$

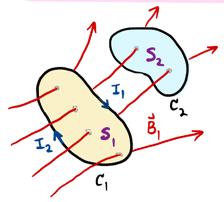
∴ $\boxed{H_2=H_1\sqrt{\sin^2\alpha_1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\cos\alpha_1\right)^2}}$

note: คล้ายกับสนามไฟฟ้า

$E_2=E_1\sqrt{\sin^2\alpha_1+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cos\alpha_1\right)^2}$

$\alpha_2=\tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\alpha_1\right)$

▸ Inductances & Inductors



จากรูป เมื่อมีกระแส I_1 ในวงปิด C_1 จะทำให้มี $\vec{B}_1$ เกิดขึ้น จะได้ว่า ฟลักซ์จากวง C_1 ที่ผ่านผิว S_2 (วงปิด C_2) คือ

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

ถ้าหากวงปิด C_2 นั้นเป็นขดลวดที่พันรอบ N_2 รอบ จะได้ว่า

flux linkage : $\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$ [Wb]

กำหนดให้ $\Lambda_{12} = L_{12} I_1$ จะได้ว่า

mutual inductance [H]: $\boxed{L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{d\Lambda_{12}}{dI_1}}$

General case — กรณี linear media

ในทำนองเดียวกันนี้ฟลักซ์จาก I_1 ที่คล้องผ่านผิว S_1 เองด้วย จะได้ว่า

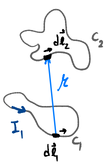
$\Lambda_{11} = N_1 \Phi_1$

self inductance [H]: $\boxed{L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} = \frac{d\Lambda_{11}}{dI_1}}$

General case — กรณี linear media

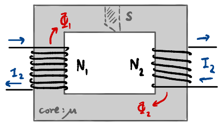
Mutual flux:

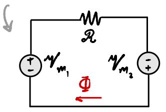
$$L_{12} = \frac{N_2}{I_1}\int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 = \frac{N_2}{I_1}\int (\nabla \times \vec{A}_1)\cdot d\vec{s}_2 = \frac{N_2}{I_1}\oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{N_2}{I_1}\oint\left(\oint \frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi R} d\vec{\ell}_1\right)\cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{R}$$



$$\boxed{L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{R}}$$

(Neumann formula) — N_1, N_2 รวมเป็น line integral





กรณีไม่มี leakage flux

พิจารณา magnetic circuit :

$\mathcal{V}_{m_1} = N_1 I_1$, $\mathcal{V}_{m_2} = N_2 I_2$

$\Phi = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}} + \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}} = \Phi_1 = \Phi_2$

จะได้ว่า

$\Lambda_1 = N_1 \Phi_1 = N_1\left(\frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}} + \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}}\right)$

$\Lambda_2 = N_2 \Phi_2 = N_2\left(\frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}} + \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}}\right)$

จาก $L = \frac{\Lambda}{I}$ จะได้ว่า

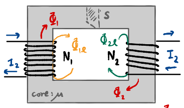
$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$, $\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$

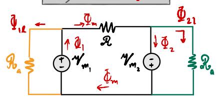
$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$, $\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$

self inductance — Mutual inductance

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\boxed{L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11} L_{22}}}$$





กรณีมี leakage flux

มี leakage flux ที่ N_1 และ N_2 → $\Phi_{1\ell}$ กับ $\Phi_{2\ell}$

$\Lambda_1 = N_1 \Phi_1 = N_1(\Phi_m + \Phi_{1\ell}) = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$

$\Lambda_2 = N_2 \Phi_2 = N_2(\Phi_m + \Phi_{2\ell}) = L_2 I_2 + L_{21} I_1$

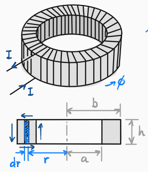
$N_1 \Phi_{1\ell} = L_{1\ell} I_1$, $N_2 \Phi_{2\ell} = L_{2\ell} I_2$

leakage inductance

$$\boxed{L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_{11} L_{22}}}$$

coupling constant $(0 \le k \le 1)$

(ex) Assume that N turns of wire are tightly wound on a toroidal frame of a rectangular cross section with dimensions as shown in a figure. Assuming the permeability of the medium to be μ_0, find the self-inductance of the toroidal coil.



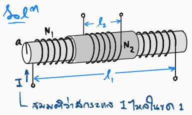
Sol^n Ampère's law: $\vec{B} = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{a}_\phi$

flux linkage: $\Lambda = N\int_a^b \left(-\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{a}_\phi\right)\cdot\left(-h\,dr\,\vec{a}_\phi\right)$

$\Lambda = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$L = \frac{\Lambda}{I} \longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

(ex) Two coils of N_1 and N_2 turns are wound concentrically on a straight cylindrical core of radius a and permeability μ. The windings have lengths ℓ_1 and ℓ_2, respectively. Find the mutual inductance between the coils.



Sol^n สมมติว่ากระแส I ไหลในขด 1

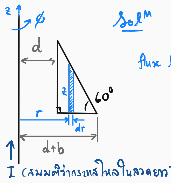
magnetic flux จาก I ที่ผ่านขด 2

$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I}{\ell}\cdot\pi a^2$

$\Lambda_{12} = \frac{\mu_0}{\ell} N_1 N_2 I \pi a^2$

$\therefore \boxed{L_{12} = \frac{\mu_0}{\ell} N_1 N_2 \pi a^2}$

(ex) Determine the mutual inductance between a conducting triangular loop and a very long straight wire as shown in a figure.



Sol^n $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{a}_\phi$

flux linkage $\Lambda_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\int_0^{-[r-(b+d)]\tan 60°} \frac{1}{r}\,dz\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+b} -\frac{\sqrt{3}[r-(b+d)]}{r}\,dr$

$\Lambda_{12} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left[-r + (b+d)\ln r\right]_d^{d+b} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right) - b\right]$

$$\boxed{L_{12} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right) - b\right]}$$

▸ Magnetic Energy

พลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็ก

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_v \vec{H}\cdot\vec{B}\,dv = \frac{1}{2}\int_v \vec{A}\cdot\vec{J}\,dv}$$

• Energy density (energy per unit volume)

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}}$$

พลังงานที่สะสมใน inductor

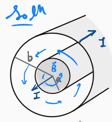
$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I}$$

กรณีที่ระบบที่มีกระแส $I_1, \ldots, I_N$ จำนวน N วง

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\sum_j^N\sum_k^N L_{jk} I_j I_k}$$

$L = \frac{2W_m}{I^2}$ $\Phi = \frac{2W_m}{I}$

(ex) Determine the inductance per unit length of an air coaxial transmission line that has a solid inner conductor of radius a and a very thin outer conductor of a radius b.



Sol^n จาก Ampère's law : $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$

$r < a$: $H_\phi 2\pi r = I\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \longrightarrow H_\phi = \frac{Ir}{2\pi a^2} \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$

$a < r < b$: $H_\phi 2\pi r = I \longrightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

พลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็ก (ต่อหน่วยความยาว)

$$W'_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^a \left(\frac{r}{a^2}\right)^2 r\,dr\,d\phi + \int_0^{2\pi}\int_a^b\left(\frac{1}{r}\right)^2 r\,dr\,d\phi\right\} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left\{\frac{r^4}{4a^4}\Big|_0^a + \ln r\Big|_a^b\right\} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right\}$$

พลังงานแม่เหล็กในตัวนำรัศมี a

พลังงานแม่เหล็ก ที่ช่องระหว่าง ตัวนำ ชั้นในกับชั้นนอก

$L' = \frac{2W'_m}{I^2}$ $\therefore \boxed{L' = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}$ [H/m]

การหา inductance :

สมมติว่ามีกระแส I ไหลในส่วนที่สร้างกระแส (บางกรณีอาจจะเป็น $\vec{K}_s$ หรือ $\vec{J}$)

↓

หาทิศของ $\vec{H}, \vec{B}$ โดยใช้กฎมือขวา

↓

ชนิดของวัสดุ

1 ชนิด → หา $\vec{H}$ จาก $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$ จะได้ $\vec{B} = \mu\vec{H}$

↓

หาฟลักซ์ $\Phi_m = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$ หรือ $W_m = \frac{1}{2}\int_v \vec{B}\cdot\vec{H}\,dv$

↓

$L = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{\Lambda}{I}$ หรือ $L = \frac{2W_m}{I^2}$

>1 ชนิด → พิจารณา Boundary condition

- $\vec{H} \perp$ ผิว: $\vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2}$ ↓ จาก Ampère's law $\int_{m_1}\frac{\vec{B}}{\mu_1}\cdot d\vec{\ell} + \int_{m_2}\frac{\vec{B}}{\mu_2}\cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$ ↓ หา Φ_m หรือ W_m
- $\vec{H}$ // ผิว: $\vec{a}_{n2}\times(\vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2}) = \vec{K}_s$ ↓ $\vec{H}$ คงที่ ↓ $\Phi_m = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{m_1}\mu_1\vec{H}\cdot d\vec{s} + \int_{m_2}\mu_2\vec{H}\cdot d\vec{s}$ หรือ $W_m = \frac{1}{2}\int_v \vec{B}\cdot\vec{H}\,dv$

↓

$L = \frac{N\Phi_m}{I}$ หรือ $\boxed{L = \frac{W_m}{2I^2}}$

เฉพาะ self inductance

เฉพาะ self-inductance

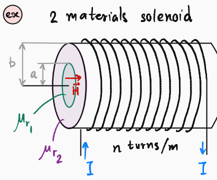
$$L = \begin{cases} \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r_i} & \text{[H/m] (Coaxial)} \\ \mu n^2 A & \text{[H/m] (Solenoid)} \\ \frac{\mu N^2 h}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r_i} & \text{[H] (Toroid)} \end{cases}$$

ลักษณะการต่อวัสดุ

$\vec{B}, \vec{H}$ ขนาน รอยต่อ: $L_t = \sum_i L_i = \int_i dL_i$

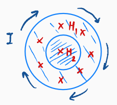
$\vec{B}, \vec{H}$ ทะลุ รอยต่อ: $L_t^{-1} = \sum_i r_i L_i^{-1} = \int_i r_i\,dL_i^{-1}$ — r_i อัตราส่วนปริมาตร

(ex) 2 materials solenoid



Sol^n

Method i



กำหนดทิศทางกระแสดังรูป

Boundary condition : $\vec{a}_{2n}\times(\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t}) = \vec{K}_s$

เนื่องจาก $\vec{K}_s = \vec{0}$ ∴ $H_{1t} = H_{2t} = H_z$

Ampère's law : $H_z = nI$ (solenoid)

$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^a (\mu_{r_1}\mu_0 nI)\,r\,dr\,d\phi + \int_0^{2\pi}\int_a^b (\mu_{r_2}\mu_0 nI)\,r\,dr\,d\phi$

$\Phi_m = \mu_0 nI\pi\left(\mu_{r_1}a^2 + \mu_{r_2}(b^2 - a^2)\right)$

จะได้ flux linkage per unit length

$\Lambda' = \mu_0 n^2 I\pi\left(\mu_{r_1}a^2 + \mu_{r_2}(b^2 - a^2)\right)$

inductance per unit length

$L' = \frac{\Lambda'}{I}$

$\therefore \boxed{L' = \mu_0 n^2\pi\left\{\mu_{r_1}a^2 + \mu_{r_2}(b^2 - a^2)\right\}}$ [H/m]

Method ii

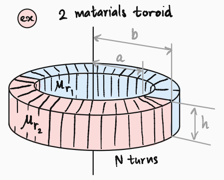
$\vec{H}$ ขนานไปกับรอยต่อ : ใช้ $L_{total} = \sum_i L_i$

$L' = L'_1 + L'_2$

$= \mu_{r_1}\mu_0 n^2\pi a^2 + \mu_{r_2}\mu_0 n^2\pi(b^2 - a^2)$

$\boxed{L' = \mu_0 n^2\pi\left\{\mu_{r_1}a^2 + \mu_{r_2}(b^2 - a^2)\right\}}$

(ex) 2 matarials toroid



Sol^n

method i ที่รอยต่อ $\vec{H} \perp$ ผิว

พิจารณา Boundary condition : $\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} = \vec{B}_\phi$

Ampère's law : $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$

$\frac{B_\phi}{\mu_{r_1}\mu_0}(\pi r) + \frac{B}{\mu_{r_2}\mu_0}(\pi r) = NI$

นั่นคือ $B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{\pi r}\left\{\frac{\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_{r_1} + \mu_{r_2}}\right\}$

จะได้ว่า $\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{s}$

$= \int_0^h\int_a^b \frac{\mu_0 NI}{\pi r'}\left\{\frac{\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_{r_1} + \mu_{r_2}}\right\}dr'\,dz'$

$= \frac{\mu_0 NIh}{\pi}\left\{\frac{\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_{r_1} + \mu_{r_2}}\right\}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

flux linkage

$\Lambda = N\Phi_m$

$= \frac{\mu_0 N^2 Ih}{\pi}\left\{\frac{\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_{r_1} + \mu_{r_2}}\right\}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

∴ Inductance $L = \frac{\Lambda}{I}$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 h}{\pi}\left\{\frac{\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_{r_1} + \mu_{r_2}}\right\}\ln\frac{b}{a}}$$

Method ii

$\vec{H}$ ทะลุรอยต่อ

$\frac{1}{L_{total}} = \sum_i r_i\frac{1}{L_i}$

(r_i คืออัตราส่วนปริมาตร)

จาก $L_{toroid} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r_i}$

จะได้ว่า

$\frac{1}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\mu_{r_1}\mu_0 N^2 h\ln\frac{b}{a}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\mu_{r_2}\mu_0 N^2 h\ln\frac{b}{a}}\right)$

$= \frac{\pi}{\mu_0 N^2 h\ln\frac{b}{a}}\left\{\frac{1}{\mu_{r_1}} + \frac{1}{\mu_{r_2}}\right\}$

$\therefore \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 h\ln\frac{b}{a}}{\pi}\cdot\left\{\frac{\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_{r_1} + \mu_{r_2}}\right\}}$

Magnetic forces & torques

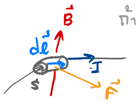
เมื่อมีประจุ q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ผ่านสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$

$\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}}$ [N]

กรณีที่มีสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ $\Rightarrow \vec{F}_e = q\vec{E}$

$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}$ [N] (Lorentz' force equation)

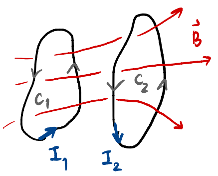
พิจารณาส่วนเล็กๆ ยาว $d\ell$ ที่มีพื้นที่หน้าตัด S มี e^- N ประจุต่อหน่วยปริมาตร ถ้า e^- ในบริเวณนี้เคลื่อนที่ด้วย $\vec{u}$ ผ่านสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$



$d\vec{F}_m = -NeS|d\ell|\vec{u}\times\vec{B}$

$d\vec{F}_m = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$ กำหนดให้ $d\vec{\ell}$ มีทิศเดียวกับ I

แรงแม่เหล็กที่กระทำกับกระแส I ที่ไหลใน closed circuit → $\boxed{F_m = I\oint_c d\vec{\ell}\times\vec{B}}$ [N]



พิจารณากระแส I_1, I_2 ไหลในวงปิด C_1, C_2 ตามลำดับ

จาก Biot-Savart's law กระแสทั้งสองจะสร้าง $\vec{B}_1, \vec{B}_2$

จะได้ว่าแรงที่ $\vec{B}_2$ ทำกับกระแส I_1

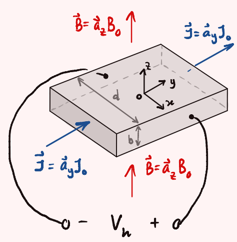
$$\vec{F}_{21} = I_1\oint_{c_1} d\vec{\ell}_1\times\vec{B}_2 = I_1\oint_{c_1} d\vec{\ell}_1\times\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{c_2}\frac{d\vec{\ell}_2\times\vec{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2}$$

$\vec{R}_{21}$ ชี้จาก $d\vec{\ell}_2$ ไปยัง $d\vec{\ell}_1$

$$\therefore \boxed{\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint_{c_1}\oint_{c_2}\frac{d\vec{\ell}_1\times(d\vec{\ell}_2\times\vec{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2}}$$

(Ampere' law of force)

• **The Hall's effect** : พิจารณาตัวนำที่มีพื้นที่หน้าตัด $d\times b$ ที่วางตัวอยู่ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็ก $\vec{B} = \vec{a}_zB_0$ สม่ำเสมอ



และมีกระแส $\vec{J} = \vec{a}_yJ_0 = Nq\vec{u}$ สม่ำเสมอไหลผ่านหน้าตัดดังรูป

└ drift velocity

└ ประจุ (ในกรณีนี้คือ e^- ; $q=-e$) } $\vec{u} = -\frac{J_0}{ne}\vec{a}_y = -\vec{a}_yu_0$

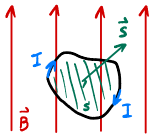
เนื่องจากมีประจุเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก จะได้ว่า $\vec{F}_m = q\vec{u}\times\vec{B} = \vec{a}_xeu_0B_0$

เพื่อให้กระแสไหลในทิศทางเดิม จะเกิดสนามไฟฟ้าขึ้นในตัวนำ $\vec{E}_h = -\vec{u}\times\vec{B}$ (Hall field)

สำหรับตัวอย่างนี้ : $\vec{E}_h = -(-\vec{a}_yu_0)\times(\vec{a}_zB_0) = \vec{a}_xu_0B_0 \rightarrow V_h = -\int_0^d E_hdx = u_0B_0d$

└ Hall voltage

* $E_x/J_yB_z = \boxed{1/Nq}$ — Hall coeffieint



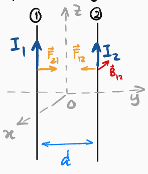
magnetic tourque [N·m]

$\boxed{\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B}}$

magnetic moment [A·m²]

$\vec{m} = I\vec{S}$

(ex) Determine the force per unit length between two infinitely long parallel conducting wires carrying currents I_1 and I_2 in the same direction. The wires are separated by a distance d.



Sol^n กำหนดทิศทาง I ดังรูป

พิจารณาสนามแม่เหล็กจาก I_1 ที่ผ่าน I_2 จะได้ว่า

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0I_1}{2\pi d}\vec{a}_x$$

แรงแม่เหล็กที่กระทำต่อ I_2 (ต่อหน่วยความยาว) คือ

$$\vec{F}_{12}' = -\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi d}\vec{a}_y$$

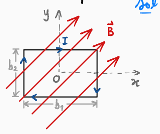
ในทำนองเดียวกันสามารถหาแรงได้ว่า

$$\vec{F}_{21}' = -\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi d}\vec{a}_y$$

ถ้า I มีทิศเดียวกัน จะดูดกัน
ถ้า I มีทิศตรงข้าม จะผลักกัน

ดังนั้น ① และ ② "ดูด" กันด้วย $\boxed{|\vec{F}_m'| = \frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi d}}$ [N/m]

(ex) A rectangular loop in the xy-plane with sides b_1 and b_2 carrying a current I lies in a uniform magnetic field $\vec{B} = \vec{a}_xB_x + \vec{a}_yB_y + \vec{a}_zB_z$. Determine the force and torque on the loop.



Sol^n $\vec{m} = -\vec{a}_zIb_1b_2$

$\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B}$

$= (-\vec{a}_zIb_1b_2)\times(\vec{a}_xB_x+\vec{a}_yB_y+\vec{a}_zB_z)$

$= -\vec{a}_yIb_1b_2B_x + \vec{a}_xIb_1b_2B_y$

$\boxed{\vec{T} = Ib_1b_2(\vec{a}_xB_y - \vec{a}_yB_x)}$ [Nm]

Forces in terms of stored magnetic energy

└→ พิจารณาโดยใช้ principle of virtual displacement.

(1) System of circuits with constant flux linkages.

flux linkage ไม่เปลี่ยน → $e = -\frac{d\Lambda}{dt} = 0$ → แหล่งกำเนิดไม่จ่ายพลังงาน

∴ Mechanical work : $\vec{F}_\Phi\cdot d\vec{\ell} = -dW_m = -(\nabla W_m)\cdot d\vec{\ell}$

constant Λ → $\boxed{\vec{F}_\Phi = -\nabla W_m}$ [N]

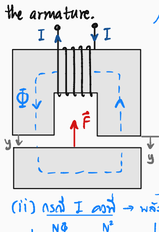
(2) System of circuits with constant currents.

flux linkage เปลี่ยน → แหล่งกำเนิดต้องจ่ายพลังงานเพื่อให้กระแส I คงที่

∴ Mechanical work : $\vec{F}_\Phi\cdot d\vec{\ell} = dW_m = (\nabla W_m)\cdot d\vec{\ell}$

constant I → $\boxed{\vec{F}_I = \nabla W_m}$ [N]

(ex) Consider the electromagnetic in the figure, in which a current I in N-turn coil produces a flux Φ in the magnetic circuit. The cross-sectional area of the core is S. Determine the lifting force on the armature.



Sol^n กำหนดให้ virtual displacement = $y\vec{a}_y$

(i) กรณี Φ คงที่ :

พลังงานแม่เหล็กที่จะสะสมใน airgap (2 ฝั่ง) คือ

$$W_m = 2\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)Sy = \frac{\Phi^2}{\mu_0S}y$$

จะได้ว่า $\vec{F}_\Phi = -\nabla W_m = -\vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi^2y}{\mu_0S}\right)$

$$\boxed{\vec{F}_\Phi = -\vec{a}_y\left(\frac{\Phi^2}{\mu_0S}\right)}$$

(ii) กรณี I คงที่ → พลังงานสะสม $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + 2y/\mu_0S}$

$W_m = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2I^2}{\mathcal{R}_c+2y/\mu_0S}\right)$

$\vec{F}_I = \nabla W_m = \vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{N^2I^2}{\mathcal{R}_c+2y/\mu_0S}\right)$

$$\boxed{\vec{F}_I = -\vec{a}_y\frac{1}{\mu_0S}\frac{N^2I^2}{(\mathcal{R}_c+2y/\mu_0S)^2} = -\vec{a}_y\frac{\Phi^2}{\mu_0S}}$$

ชี้ว่าแรงแม่เหล็กกระทำในทิศทางที่ทำให้ airgap ลดลง

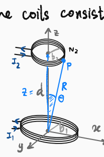
Forces in terms of mutual inductance

กรณีที่มี 2 วงจร → I_1, I_2 ที่มี self inductance L_1, L_2 และ mutual inductance L_{12}

จะมีพลังงานสะสม $W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$

ภายใต้เงื่อนไขที่ กระแสคงที่ $\vec{F}_I = \nabla W_m = I_1I_2(\nabla L_{12})$

(ex) Determine the force between two coaxial circular coils of radii b_1 and b_2 separated by a distance d that is much larger than the radii ($d \gg b_1, b_2$). The coils consist of N_1 and N_2 closely wound turns and carry currents I_1 and I_2, respectively.



Sol^n $\vec{A}_{12}$ (ที่ P)

$\vec{A}_{12} = \vec{a}_\phi\frac{\mu_0N_1I_1b_1^2}{4R^2}\sin\theta$

$= \vec{a}_\phi\frac{\mu_0N_1I_1b_1^2b_2}{4(z^2+b_2^2)^{3/2}}$

$\Phi_{12} = \oint_{C_2}\vec{A}_{12}\cdot d\vec{\ell}_2 = \int_0^{2\pi}\vec{A}_{12}b_2d\phi$

$= \frac{\mu_0N_1I_1b_1^2b_2^2\pi}{2(z^2+b_2^2)^{3/2}}$

$\therefore L_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0N_1N_2b_1^2b_2^2\pi}{2(z^2+b_2^2)^{3/2}}$

$\vec{F}_I = I_1I_2(\nabla L_{12}) = \vec{a}_zI_1I_2\left(\frac{\partial}{\partial z}L_{12}\right)\Big|_{z=d}$

$$\therefore \boxed{\vec{F}_I = -\vec{a}_z\frac{3\mu_0I_1I_2N_1N_2\pi b_1^2b_2^2d}{2(d^2+b_2^2)^{5/2}} \approx -\vec{a}_z\frac{3\mu_0m_1m_2}{2\pi d^4}}$$

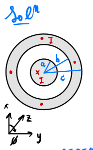
$d \gg b_2$

แรงดึงดูดระหว่างขดลวดทั้ง 2

Additional Problems

① A current I flows in the inner conductor of an infinitely long coaxial line and returns via the outer conductor. The radius of the inner conductor is a, and the inner and outer radii of the outer conductor are b and c, respectively. Find the magnetic flux density $\vec{B}$ for all regions and plot $|\vec{B}|$ versus r.

Sol^n



พิจารณาว่า I ไหลในตัวนำสม่ำเสมอ จะได้ว่า

$$\vec{J}\begin{cases}\frac{I\vec{a}_z}{\pi a^2} & ; r<a\\ \frac{-I\vec{a}_z}{\pi(c^2-b^2)} & ; b<r<c\\ \vec{0} & ; \text{otherwise}\end{cases}$$

Ampère's law : $\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0I_{enc}$

$0\le r\le a$: $B(2\pi r) = \mu_0I\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$

$\vec{B} = \frac{\mu_0Ir}{2\pi a^2}\vec{a}_\phi$

$a<r<b$: $B(2\pi r) = \mu_0I$

$\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi r}\vec{a}_\phi$

$b<r<c$: $B(2\pi r) = \mu_0\left(I - I\left(\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\right)$

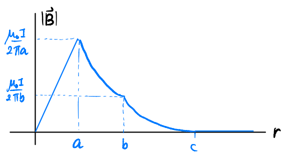
$\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\vec{a}_\phi$

$r>c$: $B(2\pi r) = 0$

$\vec{B} = \vec{0}$

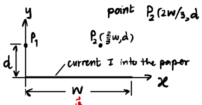
ดังนั้น

$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases}\frac{\mu_0Ir}{2\pi a^2}\vec{a}_\phi & ; r<a\\ \frac{\mu_0I}{2\pi r}\vec{a}_\phi & ; a<r<b\\ \frac{\mu_0I}{2\pi r}\cdot\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\vec{a}_\phi & ; b<r<c\\ \vec{0} & ; r>c\end{cases}}$$

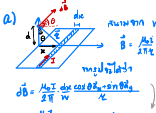


② A current flows lengthwise in a very long, thin conducting sheet of width w as shown in a figure. a) Assume that the current flows into the paper, determine the magnetic flux density $\vec{B}_1$ at point $P_1(0,d)$

b) Use the result in part (a) to find the magnetic flux density $\vec{B}_2$ at point $P_2(2w/3, d)$



a)



สนามจาก very long line $\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi r}\vec{a}_\phi$

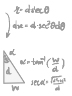
ทฤษฎีจะได้ว่า

$d\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi}\cdot\frac{dx}{w}\cdot\frac{\cos\theta\vec{a}_x+\sin\theta\vec{a}_y}{r}$

$r = d\sec\theta$
$dx = d\sec^2\theta d\theta$

$= \frac{\mu_0I}{2\pi w}(\vec{a}_x + \tan\theta\,\vec{a}_y)d\theta$

$\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi w}\int_0^\alpha(\vec{a}_x+\tan\theta\vec{a}_y)d\theta$



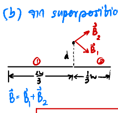
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{d}\right)$

$\sec\alpha = \frac{\sqrt{w^2+d^2}}{d}$

$\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi w}\left(\vec{a}_x\theta\big|_0^\alpha + \vec{a}_y\ln(\sec\theta)\big|_0^\alpha\right) = \frac{\mu_0I}{2\pi w}\left\{\left(\tan^{-1}\left(\frac{w}{d}\right)\right)\vec{a}_x + \left(\ln\frac{\sqrt{w^2+d^2}}{d}\right)\vec{a}_y\right\}$

$$\therefore \boxed{\vec{B}(0,d) = \frac{\mu_0I}{2\pi w}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{w}{d}\right)\vec{a}_x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{w^2}{d^2}\right)\vec{a}_y\right\}}$$

(b) จาก superposition principle พิจารณา



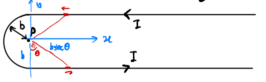
$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0I}{2\pi\left(\frac{2w}{3}\right)}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2w}{3d}\right)\vec{a}_x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{4w^2}{9d^2}\right)\vec{a}_y\right\}$

$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0I}{2\pi\left(\frac{w}{3}\right)}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{w}{3d}\right)\vec{a}_x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{w^2}{9d^2}\right)\vec{a}_y\right\}$

$$\therefore \boxed{\vec{B}\left(\frac{2w}{3},d\right) = \frac{\mu_0I}{2\pi w}\left\{\left(\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2w}{3d}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{w}{3d}\right)\right)\vec{a}_x + \left(\frac{1}{2}\ln\frac{(1+w^2/9d^2)^3}{(1+4w^2/9d^2)^{3/2}}\right)\vec{a}_y\right\}}$$

③ A long wire carrying a current I folds back with a semicircular bend of radius b as in a figure. Determine the magnetic flux density at the center point P of the bend.



Sol^n พิจารณาสนามแม่เหล็กจาก semi-infinitely long wire ทั้ง 2 เส้น

$$\vec{B}_1 = 2\times\frac{\mu_0I}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{b\sec^2\theta d\theta\cdot\cos\theta}{b^2\sec^2\theta}\vec{a}_z = \frac{\mu_0I}{2\pi b}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\,\vec{a}_z = \frac{\mu_0I}{2\pi b}\vec{a}_z$$

พิจารณาสนามแม่เหล็กจากครึ่งวงกลมรัศมี b

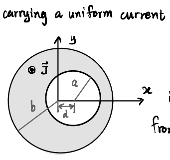
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0I}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{bd\phi\,\vec{a}_z}{b^2} = \frac{\mu_0I}{4b}\vec{a}_z$$

จาก Superposition Principle จะได้ว่า

$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

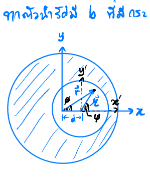
$$\therefore \boxed{\vec{B}_p = \frac{\mu_0I}{2b}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\vec{a}_z}$$

④ In certain experiments it is desirable to have a region of constant magnetic flux density. This can be created in an off-center cylindrical cavity that is cut in very long cylindrical conductor carrying a uniform current density. Refer to cross section in a figure.



The uniform axial current density is $\vec{J} = \vec{a}_zJ$. Find the magnetude and direction of $\vec{B}$ in the cylindrical cavity whose axis is displaced from that of the conducting part by a distance d.

Sol^n จาก Superposition principle สนาม $\vec{B}$ ในช่องว่างสามารถหาได้โดยพิจารณาสนามจากตัวนำรัศมี b ที่มีกระแส $\vec{J}$ และ สนามจากตัวนำรัศมี a ที่มีกระแส $-\vec{J}$



นั่นคือ $\vec{B}_{cavity} = \vec{B}_a + \vec{B}_b$

Ampère's law :

$\vec{B}_a = \frac{-\mu_0J(\pi r^2)}{2\pi r}\vec{a}_\psi$

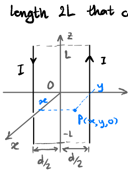
$= -\frac{1}{2}\mu_0Jr(-\sin\psi\,\vec{a}_{x'} + \cos\psi\,\vec{a}_{y'})$

$\vec{B}_a = -\frac{1}{2}\mu_0J(-y\vec{a}_x + (x-d)\vec{a}_y)$ — (*)

$\vec{B}_b = \frac{1}{2}\mu_0Jr(-\sin\phi\,\vec{a}_x + \cos\phi\,\vec{a}_y) = \frac{1}{2}\mu_0J(-y\vec{a}_x + x\vec{a}_y)$ — (**)

$\therefore \vec{B}_{cavity} = \vec{B}_a + \vec{B}_b = \boxed{\frac{1}{2}\mu_0Jd\,\vec{a}_y}$

⑤ Starting from the expression of $\vec{A}$ for the vector magnetic potential at a point of bisecting plane of a straight wire of length 2L that carries a current I :



(a) Find $\vec{A}$ at point P(x,y,0) in the bisecting plane of two parallel wires each of length 2L, located at $y = \pm\frac{d}{2}$ and carrying equal and opposite currents, as shown in a figure.

(b) Find $\vec{A}$ due to equal and opposite currents in a very long two-wire transmission line.

(c) Find $\vec{B}$ from $\vec{A}$ in part (b).

(d) Find the equation for the magnetic flux lines in the xy plane.

Sol^n (a) จาก $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{I\,d\vec{\ell}'}{R}$ จะได้ว่า

$$\vec{A}(x,y,0) = \frac{\mu_0I}{4\pi}\left\{\vec{a}_z\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{x^2+(y-\frac{d}{2})^2+z'^2}} - \vec{a}_z\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{x^2+(y+\frac{d}{2})^2+z'^2}}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0I}{4\pi}\left\{\vec{a}_z\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+x^2+(y-\tfrac{d}{2})^2}\right) - \vec{a}_z\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+x^2+(y+\tfrac{d}{2})^2}\right)\right\}\Big|_{-L}^{L}$$

$$\boxed{\vec{A}(x,y,0) = \frac{\mu_0I}{4\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{L^2+x^2+(y-d/2)^2}+L}{\sqrt{L^2+x^2+(y-d/2)^2}-L}\times\frac{\sqrt{L^2+x^2+(y+d/2)^2}-L}{\sqrt{L^2+x^2+(y+d/2)^2}+L}\right)\vec{a}_z}$$

(b) พิจารณา $L\to\infty$ จะได้ว่า

$$\vec{A}(x,y,0) \approx \lim_{L\to\infty}\frac{\mu_0I}{4\pi}\ln\left\{\frac{\left(2+\frac{x^2+(y-d/2)^2}{2L^2}\right)\left(\frac{x^2+(y+d/2)^2}{2L^2}\right)}{\left(\frac{x^2+(y-d/2)^2}{2L^2}\right)\left(2+\frac{x^2+(y+d/2)^2}{2L^2}\right)}\right\}\vec{a}_z = \boxed{\frac{\mu_0I}{4\pi}\ln\frac{x^2+(y+\frac{d}{2})^2}{x^2+(y-\frac{d}{2})^2}\vec{a}_z}$$

(c) $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \vec{a}_x\frac{\partial}{\partial y}A_z - \vec{a}_y\frac{\partial}{\partial x}A_z$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0I}{4\pi}\left\{\vec{a}_x\left(\frac{2(y+\frac{d}{2})}{x^2+(y+\frac{d}{2})^2} - \frac{2(y-\frac{d}{2})}{x^2+(y-\frac{d}{2})^2}\right) - \vec{a}_y\left(\frac{2x}{x^2+(y+\frac{d}{2})^2} - \frac{2x}{x^2+(y-\frac{d}{2})^2}\right)\right\}}$$

** ลองพิจารณาจาก Ampère's law.

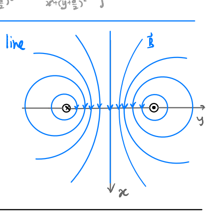
$\vec{B} = \frac{\mu_0I}{2\pi}\frac{\vec{a}_{\phi_1}}{r_1} - \frac{\mu_0I}{2\pi}\frac{\vec{a}_{\phi_2}}{r_2} = \frac{\mu_0I}{2\pi}\left\{\frac{-(y-\frac{d}{2})\vec{a}_x + (x)\vec{a}_y}{x^2+(y-\frac{d}{2})^2} - \frac{-(y+\frac{d}{2})\vec{a}_x + x\vec{a}_y}{x^2+(y+\frac{d}{2})^2}\right\}$ เหมือนกัน.

(d) ในระนาบสมการในระนาบของ flux line

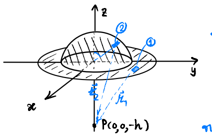
เราจะเขียน เส้นที่ ...ตั้งฉาก นั่นคือ $|\vec{A}|$ คงที่

จะได้ว่า $\boxed{\frac{x^2+(y+\frac{d}{2})^2}{x^2+(y-\frac{d}{2})^2} = K}$

(K = constant)



⑥ Determine the magnetic field intensity at a point P(0,0,−h) due to the surface currents as shown below. The first surface is a circular flat ring ($2 \le r \le 3$ [m]; $0 \le \phi \le 2\pi$; $z = 0$) with surface current density $\vec K_1 = 2\vec a_\phi$ [A/m]. The second surface is an upper hemispherical surface ($R = 2$ [m]; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \phi \le 2\pi$) with surface current density $\vec K_s = 2\sin\theta\,\vec a_\phi$ [A/m].



Sol^n • ส่วนที่ ① $ds_1 = r\,dr\,d\phi$, $\vec{\mathcal R}_1 = -r\vec a_r - h\vec a_z$, $\vec K_s = 2\vec a_\phi$ [A/m]

จาก Biot-Savart's law จะได้ว่า

$$d\vec H_1 = \frac{\vec K_s\,ds \times \vec{\mathcal R}}{4\pi \mathcal R^3} = \frac{(2\vec a_\phi)\times(-r\vec a_r - h\vec a_z)\,r\,dr\,d\phi}{4\pi(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{(-2hr\vec a_r + 2r^2\vec a_z)\,dr\,d\phi}{4\pi(r^2+h^2)^{3/2}}$$

ดังนั้น $$\vec H_1 = \int_0^{2\pi}\int_2^3 \frac{(-2hr\vec a_r + 2r^2\vec a_z)\,dr\,d\phi}{4\pi(r^2+h^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi}\int_2^3 \frac{(-2hr\cos\phi\,\vec a_x - 2hr\sin\phi\,\vec a_y + 2r^2\vec a_z)\,dr\,d\phi}{4\pi(r^2+h^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\vec a_z}{2\pi}(2\pi - 0)\left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} + \ln\left[r + \sqrt{r^2+h^2}\right]\right)\Big|_{r=2}^{r=3}$$

$$\therefore \vec H_1 = \vec a_z\left\{\frac{2}{\sqrt{4+h^2}} - \frac{3}{\sqrt{9+h^2}} + \ln\frac{3+\sqrt{9+h^2}}{2+\sqrt{4+h^2}}\right\}$$

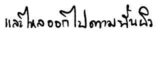
• ส่วนที่ 2 $ds_2 = 2^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$, $\vec{\mathcal R}_2 = -2\sin\theta\,\vec a_r - (h + 2\cos\theta)\vec a_z$, $\vec K_{s_2} = 2\sin\theta\,\vec a_\phi$ [A/m]

จะได้ว่า $$d\vec H_2 = \frac{\vec K_{s_2}\,ds_2 \times \vec{\mathcal R}_2}{4\pi\mathcal R^3} = \frac{(2\sin\theta\,\vec a_\phi)\times(-2\sin\theta\,\vec a_r - (h+2\cos\theta)\vec a_z)\,4\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{4\pi(h^2+4+4h\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{(-\sin^2\theta(h+2\cos\theta)\vec a_r + 2\sin^3\theta\,\vec a_z)\,d\theta\,d\phi}{(h^2+4+4h\cos\theta)^{3/2}}$$

ดังนั้น $$\vec H_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\frac{\{-\sin^2\theta(h+2\cos\theta)(\cos\phi\,\vec a_x + \sin\phi\,\vec a_y) + 2\sin^3\theta\,\vec a_z\}\,d\theta\,d\phi}{(h^2+4+4h\cos\theta)^{3/2}}$$

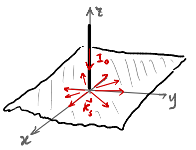
$$= \vec a_z\frac{2}{\pi}(2\pi - 0)\left[\ldots\right]_0^{\pi/2} = \vec a_z\frac{2}{3}\left\{\frac{h^4+2h^3+8h+16}{h^3\sqrt{h^2+4h+4}} - \frac{h^4+2h^2+16}{h^3\sqrt{h^2+4}}\right\}$$



$\vec H(0,0,-h) = \vec H_1 + \vec H_2$ (Superposition)

$$= \boxed{\vec a_z\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{h^4+2h^3+8h+16}{h^3\sqrt{h^2+4h+4}} - \frac{h^4+2h^2+16}{h^3\sqrt{h^2+4}}\right) + \frac{2}{\sqrt{h^2+4}} - \frac{3}{\sqrt{h^2+9}} + \ln\frac{3+\sqrt{h^2+9}}{2+\sqrt{h^2+4}}\right\}}\ \text{[A/m]}$$

⑦ กำหนดให้กระแส I_0 ไหลตามเส้นลวดตัวนำขนาดจิ๋วที่ยาวมากๆ จากปลายแกน +z มายังจุดกำเนิด และไหลออกไปตามพื้นผิวตัวนำบางที่ระนาบ z = 0 ในบริเวณอากาศว่าง. จงหา



ก) ความหนาแน่นกระแสเชิงผิวที่ตำแหน่งต่างๆ ของแผ่นตัวนำ

ข.) ค่าความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec H_1$ ที่จุด P(1,0,1) เนื่องจากกระแสในเส้นลวดตัวนำ

ค.) ค่าความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec H_2$ ที่จุด P(1,0,1) เนื่องจากกระแสในแผ่นตัวนำ

ง.) ค่าความเข้มสนามแม่เหล็กรวม $\vec H$ ที่จุด P(1,0,1)

Sol^n: ก) กระแส I_0 กระจายตัวไปบนผิว z = 0 อย่างสม่ำเสมอ ที่พิกัด $(r,\phi,0)$ ได้ $\boxed{\vec K_s = \frac{I_0}{2\pi r}\vec a_r}$ [A/m]

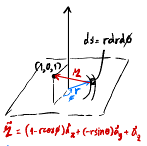
ข) จาก $\vec H = \oint\frac{I\,d\vec l \times \vec a_R}{4\pi R^2}$ จะได้ว่า

$$\vec H(1,0,1) = \frac{I_0}{4\pi}\int_\infty^0 \frac{(-\vec a_z)\times(\vec a_x + (1-z')\vec a_z)}{(1+(1-z')^2)^{3/2}}dz'$$

$$= \frac{-I_0}{4\pi}\vec a_y\int_\infty^0\frac{dz'}{(1+(1-z')^2)^{3/2}} = -\frac{I_0}{4\pi}\vec a_y\left[\frac{z'-1}{\sqrt{1+(1-z')^2}}\right]_\infty^0$$

$$\boxed{\vec H(1,0,1) = -\frac{I_0}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{\sqrt 2}\right)\vec a_y}\ \text{[A/m]}$$

ค) จาก $\vec H = \oint\frac{\vec K_s\,ds \times \vec a_R}{4\pi R^3}$ จะได้ว่า



$$\vec H_2(1,0,1) = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{I_0}{2\pi r}(\cos\phi\,\vec a_x + \sin\phi\,\vec a_y)\right)\times\vec{\mathcal R}\,r\,dr\,d\theta}{4\pi\{(1-r\cos\phi)^2 + (r\sin\theta)^2 + 1\}^{3/2}}$$

$\vec{\mathcal R} = (1 - r\cos\phi)\vec a_x + (-r\sin\theta)\vec a_y + \vec a_z$

$$= \frac{I_0}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{\vec a_x(\sin\theta) + \vec a_y(-\cos\theta) + \vec a_z(-\sin\theta)}{(r^2 - 2r\cos\theta + 2)^{3/2}}dr\,d\theta$$

$$= \frac{I_0}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}(\vec a_x\sin\phi - \vec a_y\cos\phi - \vec a_z\sin\phi)\left[\frac{\cos\phi - r}{(\cos^2\phi - 2)\sqrt{r^2 - 2r\cos\phi + 2}}\right]_{r=0}^{\infty}d\theta$$

$$= \frac{I_0}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}(\vec a_x\sin\phi - \vec a_y\cos\phi - \vec a_z\sin\phi)\left(-1 + \frac{\cos\phi}{(\cos^2\phi - 2)\sqrt 2}\right)d\theta$$

$$= \frac{I_0}{8\pi^2}\left\{0\vec a_x + 2\pi\left(-1 + \frac{1}{\sqrt 2}\right)\vec a_y + 0\vec a_z\right\}$$

$$\boxed{\vec H(1,0,1) = -\frac{I_0}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt 2}\right)\vec a_y}\ \text{[A/m]}$$

ง) จาก Superposition principle จะได้ว่า

$$\vec H(1,0,1) = \vec H_1(1,0,1) + \vec H_2(1,0,1) = \boxed{-\frac{I_0}{2\pi}\vec a_y}\ \text{[A/m]}$$

Alternative: พิจารณา Ampere's law

$\oint \vec H\cdot d\vec l = I_{enc}$

$H(2\pi) = I_0 \Rightarrow \therefore \vec H(1,0,1) = -\frac{I_0}{2\pi}\vec a_y$

จาก superposition principle

$-\frac{I_0}{2\pi}\vec a_y = -\frac{I_0}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{\sqrt 2}\right)\vec a_z + \vec H_2(1,0,1)$

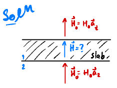
$\therefore \vec H_2(1,0,1) = -\frac{I_0}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt 2}\right)\vec a_y$ ✱ แบบไหนง่ายกว่ากัน?✱

⑧ A very large slab of material of thickness d lies perpendicularly to a uniform magnetic field of intensity $\vec H_0 = H_0\vec a_z$. Ignoring edge effect, determine the magnetic field intensity in the slab:

(a) if the slab material has a permeability μ.

(b) if the slab is a permanent magnet having a magnetization vector $\vec M_i = M_i\vec a_z$.

Sol^n



Boundary condition: $B_{1n} = B_{2n}$

(a) $\mu H = \mu_0 H_0$, $\therefore \boxed{\vec H = \frac{\mu_0}{\mu}H_0\vec a_z}$

(b) จาก $\vec B = \mu_0(\vec H + \vec M)$ จะได้ว่า $\mu_0(H + M_i\vec a_z) = \mu_0 H_0$, $\therefore \boxed{\vec H = (H_0 - M_i)\vec a_z}$

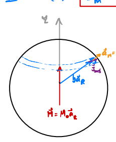
⑨ A ferromagnetic sphere of radius b is magnetized uniformly with a magnetization $\vec M = M_0\vec a_z$.

(a) Determine the equivalent magnetization current densities $\vec J_m$ and $\vec J_{ms}$.

(b) Determine the magnetic flux density at the center of the sphere.

Sol^n (a) $\boxed{\vec J_m = \nabla\times\vec M = \vec 0}$, $\vec J_{ms} = \vec M\times\vec a_n = M_0\vec a_z\times\vec a_R = M_0(\vec a_R\cos\theta - \vec a_\theta\sin\theta)\times\vec a_R$

$\therefore \boxed{\vec J_{ms} = M_0\sin\theta\,\vec a_\phi}$



(b) $\vec J_{ms} = M_0\sin\theta\,\vec a_\phi$, $\vec{\mathcal R} = -b\vec a_R$

$d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec J_{ms}\,ds\times\vec{\mathcal R}}{\mathcal R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(M_0\sin\theta\,\vec a_\phi)\times(-b\vec a_R)}{b^3}b^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

$d\vec B = -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi}\sin^2\theta\,\vec a_\theta\,d\theta\,d\phi$

$= -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi}(\cos\theta\cos\phi\,\vec a_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec a_y - \sin\theta\,\vec a_z)\sin^2\theta\,d\theta\,d\phi$

$\therefore \vec B = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi}(\cos\theta\cos\phi\,\vec a_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec a_y - \sin\theta\,\vec a_z)\sin^2\theta\,d\theta\,d\phi$

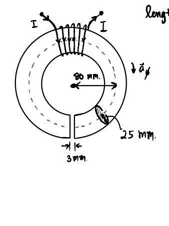
$= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi}\vec a_z(2\pi - 0)\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big|_0^\pi$

$\boxed{\vec B = \frac{2}{3}\mu_0\vec M}$

⑩ A toroidal iron core of relative permeability 3000 has a mean radius R = 80 [mm] and a circular cross section with radius b = 25 [mm]. An air gap l_g = 3 [mm] exists, and a current I flows in a 500-turn winding to produce a magnetic flux of 10^{-5} [Wb]. (See a figure below) Neglecting flux leakage and using mean path length, find a) the reluctances of the air gap and of the iron core.

b) $\vec B_g$ and $\vec H_g$ in the air gap, and $\vec B_c$ and $\vec H_c$ of the iron core,

c) the required current I.



Sol^n (a) $\mathcal R_g = \frac{l_g}{\mu_0 S_g} = \frac{3\times10^{-3}}{(4\pi\times10^{-7})(\pi)(25\times10^{-3})^2} = \boxed{1.21\times10^{6}\ H^{-1}}$

$\mathcal R_c = \frac{l_c}{\mu_r\mu_0 S_c} = \frac{2\pi(80\times10^{-3}) - 3\times10^{-3}}{3000(4\pi\times10^{-7})(\pi)(25\times10^{-3})^2} = \boxed{6.75\times10^{5}\ H^{-1}}$

(b) $\Phi = 10^{-5}$ Wb, $\boxed{\vec B_g = \vec B_c = \frac{\Phi}{S}\vec a_\phi = (5.09\times10^{-3})\vec a_\phi\ T}$

$\boxed{\vec H_g = \frac{\vec B_g}{\mu_0} = (4.05\times10^{3})\vec a_\phi\ A/m}$

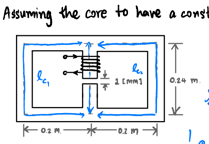
$\boxed{\vec H_c = \frac{\vec B_c}{\mu_r\mu_0} = 1.35\vec a_\phi\ A/m}$

(c) $NI = \Phi\mathcal R$

$500 I = (10^{-5})(1.21\times10^{6} + 6.75\times10^{5})$

$\boxed{I = 25.6\ mA}$

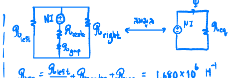
⑪ Consider the magnetic circuit in a figure. A current of 3 [A] flows through 200 turns of wire on the center leg. Assuming the core to have a constant cross-sectional area of 10^{-3} [m^2] and relative permeability of 5000:



a) Determine the magnetic flux in each leg.

b) Determine the magnetic field intensity in each leg of core and in the air gap.

Sol^n a) วิเคราะห์วงจรแม่เหล็กเทียบเท่าได้ดังรูป



$\mathcal R_{left} = \frac{3(0.2) + 0.24}{5000\mu_0(10^{-3})} = 1.019\times10^{5}\ H^{-1}$

$\mathcal R_{right} = \mathcal R_{left} = 1.019\times10^{5}\ H^{-1}$

$\mathcal R_{center} = \frac{0.24 - 0.002}{5000\mu_0(10^{-3})} = 3.788\times10^{4}\ H^{-1}$

$\mathcal R_{gap} = \frac{0.002}{\mu_0(10^{-3})} = 1.592\times10^{6}\ H^{-1}$

$\mathcal R_{eq} = \frac{\mathcal R_{left}}{2} + \mathcal R_{center} + \mathcal R_{gap} = 1.680\times10^{6}\ H^{-1}$

$\Phi = \frac{NI}{\mathcal R_{eq}} = \frac{(200)(3)}{1.680\times10^{6}} = 3.570\times10^{-4}$ Wb

$\Phi_{center} = \Phi$, $\Phi_{left} = \Phi_{right} = \frac{\Phi}{2}$

$\boxed{\Phi_{center} = 3.570\times10^{-4}\ Wb}$

$\boxed{\Phi_{right} = 1.785\times10^{-4}\ Wb}$

$\boxed{\Phi_{left} = 1.785\times10^{-4}\ Wb}$

b) $H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S}$

$\boxed{H_{left\ core} = 28.41\ A/m}$

$\boxed{H_{right\ core} = 28.41\ A/m}$

$\boxed{H_{center\ core} = 56.81\ A/m}$

$\boxed{H_{gap} = 2.841\times10^{5}\ A/m}$

⑫ Consider an infinitely long solenoid with n turns per unit length around a ferromagnetic core of cross-sectional area S. When a current is sent through the coil to create a magnetic field, a voltage $v_1 = -n\frac{d\Phi}{dt}$ is induced per unit length, which opposes the current change. Power $P_1 = -v_1 I$ per unit lenght must be supplied to overcome this induced voltage in order to increase the current to I.

a) Prove that the work per unit volume required to produced a final magnetic flux density B_f is $W_1 = \int_0^{B_f} H\,dB$

b) Assuming that the current is changed in a periodic manner such that $\vec B$ is reduced from B_f to $-B_f$ and then increased again to B_f, prove that the work done per unit volume for such a cycle of change in the ferromagnetic core is represented by the area of the hysteresis loop of the core metal.

Sol^n a) งานต่อหนึ่งหน่วยความยาวในช่วงเวลา dt คือ $P_1 dt$

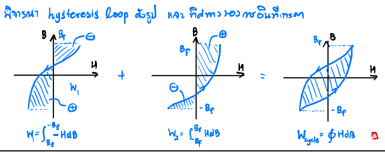
แทนค่า $P_1 = -v_1 I$ และ $v_1 = -n\frac{d\Phi}{dt}$ จะได้ว่า $P_1 dt = nI\,d\Phi$

สำหรับโซลีนอยด์ จาก Ampère's law จะได้ว่า $H = nI$

จะได้งานต่อหน่วยปริมาตรในเวลา dt คือ $dW_1 = \frac{1}{S}nI\,d\Phi = H\,dB$

ดังนั้น $W_1 = \int_0^{B_f} H\,dB$ ∎

b) พิจารณา hysteresis loop ดังรูป และคิดทางของการอินทิเกรต



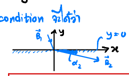
$W_1 = \int_{B_f}^{-B_f} H\,dB$ + $W_2 = \int_{-B_f}^{B_f} H\,dB$ = $W_{cycle} = \oint H\,dB$ ∎

⑬ Consider a plane boundary (y = 0) between air (region 1, $\mu_{r_1} = 1$) and iron (region 2, $\mu_r = 5000$).

a) Assuming $\vec B_1 = \vec a_x 0.5 - \vec a_y 10$ [mT], find $\vec B_2$ and the angle that $\vec B_2$ makes with the interface.

b) Assuming $\vec B_2 = \vec a_x 10 + \vec a_y 0.5$ [mT], find $\vec B_1$ and the angle that $\vec B_1$ makes with the normal to the interface.

Sol^n a) พิจารณา Boundary condition จะได้ว่า



$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_{1y} = B_{2y}$, $\therefore B_{2y} = -10$ mT

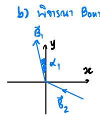
$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \frac{B_{1x}}{\mu_{r_1}\mu_0} = \frac{B_{2x}}{\mu_{r_2}\mu_0}$, $\therefore B_{2x} = 2500$ mT

$\boxed{\vec B_2 = \vec a_x 2500 - \vec a_y 10\ [mT]}$

มุมที่กระทำกับรอยต่อ

$\boxed{\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{10}{2500}\right) = 0.23^\circ}$

b) พิจารณา Boundary condition จะได้ว่า



$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_{1y} = B_{2y}$, $\therefore B_{1y} = 0.5$ mT

$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \frac{B_{1x}}{\mu_{r_1}\mu_0} = \frac{B_{2x}}{\mu_{r_2}\mu_0}$, $\therefore B_{1x} = 0.002$ mT

$\boxed{\vec B_1 = \vec a_x 0.002 + \vec a_y 0.5\ [mT]}$

มุมที่กระทำกับแนวตั้งฉาก

$\boxed{\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{0.002}{0.5}\right) = 0.23^\circ}$

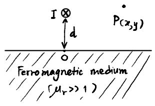
⑭ The method of images can also be applied to certain magnetostatic problems. Consider a straight, thin conductor in air parallel to and at a distance d above the plane interface of a magnetude material of relative permeability μ_r. A current I flows in the conductor.

a) Show that all boundary conditions are satisfied if

i) the magnetic field in the air is calculated from I and image current $I_i = \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right)I$, and these currents are equidistant from the interface and situated in air;

ii) the magnetic field below the boundary plane is calculated from I and $-I_i$, both at the same location. These currents are situated in an infinite magnetic material of relative permeability μ_r.

b) For a long conductor carrying a current I and for $\mu_r \gg 1$, determine the magnetic flux density $\vec B$ at the point P in a below figure.



Sol^n a) พิจารณาทั้ง 2 กรณี

• กรณี i : I และ I_i อยู่ในอากาศ

$B_{1y} = \frac{\mu_0}{2\pi r}(I + I_i)\cos\alpha = \frac{\mu_0\mu_r}{\pi(\mu_r+1)}\frac{x}{r^2}I$

$H_{1x} = \frac{1}{2\pi r}(I - I_i)\sin\alpha = \frac{I}{\pi(\mu_r+1)}\frac{d}{r^2}$

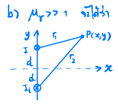
กรณี ii : I และ $-I_i$ อยู่ในตัวกลางที่มี μ_r ทั้งหมดเป็นเนื้อเดียวกัน

$B_{2y} = \frac{\mu_r\mu_0}{2\pi r}(I - I_i)\cos\alpha = \frac{\mu_0\mu_r}{\pi(\mu_r+1)}\frac{x}{r^2}I$

$H_{2x} = \frac{1}{2\pi r}(I - I_i)\sin\alpha = \frac{I}{\pi(\mu_r+1)}\frac{d}{r^2}$

จะเห็นได้ว่า $B_{1y} = B_{2y}$ และ $H_{1x} = H_{2x}$ ∴ Boundary condition are satisfied ∎

b) $\mu_r \gg 1$ จะได้ว่า $I_i = \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right)I \approx I$



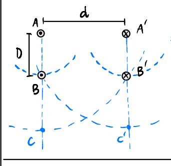
$\vec B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}\left(\vec a_x\frac{y-d}{r_i} - \vec a_y\frac{x}{r_i}\right)$

$\vec B_{i_i} = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r_2}\left(\vec a_x\frac{y+d}{r_2} - \vec a_y\frac{x}{r_2}\right)$

$\vec B = \vec B_i + \vec B_{i_i}$

$$\boxed{\vec B = \vec a_x\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{y-d}{(y-d)^2+x^2} + \frac{y+d}{(y+d)^2+x^2}\right] - \vec a_y\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{x}{(y-d)^2+x^2} + \frac{x}{(y+d)^2+x^2}\right]}$$

⑮ Calculate the mutual inductance per unit length of the air coaxial transmission lines A-A' and B-B' separated by a distance D, as shown in a figure. Assume the wire radius to be much smaller than D and the wire spacing d.



Sol^n $\vec B$ ที่ระยะ r จากเส้นลวดที่มีกระแสไหล I ที่ห่างจากเส้นลวด 1 คือ $\vec B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

พิจารณาฟลักซ์แม่เหล็กที่เกิดจากกระแส 1 ใน A ที่คล้องกับเส้นลวด B-B' คือ

$\Phi_A' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{AB}^{AB'}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{AB'}{AB}$

พิจารณาฟลักซ์แม่เหล็กที่เกิดจากกระแส 1 ใน A' ที่คล้องกับเส้นลวด B-B' คือ

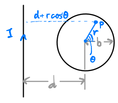
$\Phi_{A'}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{A'B'}^{A'B}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{A'B}{A'B'}$

flux linkage ต่อหนึ่งหน่วยความยาว

$\Lambda_{12}' = \Phi_A' + \Phi_{A'}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(AB')(A'B)}{(AB)(A'B')} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{D^2 + d^2}{D^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right)$

$\therefore L_{12}' = \frac{\Lambda_{12}'}{I} = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\ln\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right)}$ [H/m]

⑯ Determine the mutual inductance between a very long, straight wire and a conducting circular loop, as shown in a figure.



Sol^n จากกฎ พิจารณา Ampere's law จะได้ $\vec B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d + r\cos\theta}\vec a_\phi$

Flux linkage

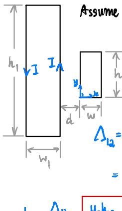
$\Lambda_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^b\int_0^{2\pi}\frac{1}{d + r\cos\theta}r\,dr\,d\theta$

$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^b\frac{2\pi r}{\sqrt{d^2 - r^2}}dr$

$\Lambda_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^b\frac{2\pi r}{\sqrt{d^2 - r^2}}dr = \mu_0 I\left(-\sqrt{d^2 - r^2}\right)\Big|_0^b = \mu_0 I\left(d - \sqrt{d^2 - b^2}\right)$

$\therefore L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I} = \boxed{\mu_0\left(d - \sqrt{d^2 - b^2}\right)}$

⑰ Find the mutual inductance between two coplanar rectangular loops with parallel sides, as shown in a figure. Assume that $h_1 \gg h_2$ ($h_2 > w_2 > d$).



Sol^n เนื่องจาก $h_1 \gg h_2$ พิจารณาเฉพาะสนามแม่เหล็กจากด้านยาวของลูปที่หนึ่ง ผ่านลูปที่สองขนาด $h_2 w_2$

Flux linkage:

$\Lambda_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left\{\int_0^{h_2}\int_d^{d+w_2}\frac{1}{x}dx\,dz - \int_0^{h_2}\int_{w_1+d}^{w_1+d+w_2}\frac{1}{x}dx\,dz\right\}$

$= \frac{\mu_0 I_1 h_2}{2\pi}\left\{\ln\frac{d+w_2}{d} - \ln\frac{w_1+w_2+d}{w_1+d}\right\} = \frac{\mu_0 I_1 h_2}{2\pi}\ln\frac{(w_1+d)(w_2+d)}{d(w_1+w_2+d)}$

$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I} = \boxed{\frac{\mu_0 h_2}{2\pi}\ln\frac{(w_1+d)(w_2+d)}{d(w_1+w_2+d)}}$

⑱ Consider two coupled circuits, having self-inductance L_1 and L_2, that carry currents I_1 and I_2, respectively. The mutual inductance between the circuits is M.

a) Find the ratio I_1/I_2 that makes the stored magnetic energy W_2 a minimum.

b) Show that $M \le \sqrt{L_1 L_2}$

Sol^n a) $W_2 = \frac{1}{2}\left[L_1 I_1^2 + 2MI_1I_2 + L_2 I_2^2\right] = \frac{I_2^2}{2}\left[L_1\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 + 2M\frac{I_1}{I_2} + L_2\right]$

กำหนดให้ $x = \frac{I_1}{I_2}$ จะได้ว่า $\frac{dW_2}{dx} = \frac{I_2^2}{2}(2L_1 x + 2M)$, $\frac{d^2 W_2}{dx^2} = L_1 I_2^2 > 0$

หมายความว่า W_2 มีค่า local minimum เมื่อ $\frac{dW_2}{dx} = 0$ นั่นคือ $x = -\frac{M}{L_1}$

∴ W_2 มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\boxed{\frac{I_1}{I_2} = -\frac{M}{L_1}}$

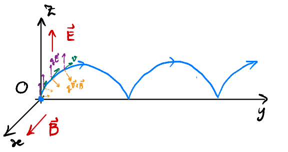
b) $W_{2\,min} = \frac{I_2^2}{2}\left[-\frac{M^2}{L_1} + L_2\right] \ge 0 \longrightarrow M \le \sqrt{L_1 L_2}$ ∎

⑲ A positive charge is released from the origin. If there are $\vec{B}$ in the x-direction and $\vec{E}$ in the z-direction.

Sol^n จากโจทย์ ในตอนแรกที่ประจุอยู่ที่จุดกำเนิด $\vec{E}$ จะทำให้ประจุมีความเร็วในทิศ $+z$ หลังเมื่อประจุเคลื่อนที่ (มีความเร็วในทิศ $+z$) $\vec{B}$ จะทำให้เกิด $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\times\vec{B}$ ซึ่งจะทำให้ทางเคลื่อนที่ของประจุนั้นเป็นเส้นโค้งไปทางทิศ $+y$ จนกระทั่ง ประจุเริ่มเคลื่อนที่ในทิศตรงข้ามกับ $\vec{E}$ ซึ่งจะทำให้ประจุถูกหน่วงไฟฟ้าต้านให้เคลื่อนที่ช้าลง แรงแม่เหล็กก็จะน้อยลงไปด้วย และประจุก็จะเริ่มเคลื่อนที่ในแนว $+z$ เหมือนตอนแรก ส่งผลให้เกิดเหตุการณ์นี้วนซ้ำไปเรื่อยๆ

หากพิจารณาความเร็วของประจุ

$$\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$



จะได้ว่า

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\vec{a}_y - B\dot{y}\vec{a}_z$$

Lorentz force :

$$\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = q(E\vec{a}_z + B\dot{z}\vec{a}_y - B\dot{y}\vec{a}_z) = q\{B\dot{z}\vec{a}_y + (E-B\dot{y})\vec{a}_z\}$$

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$: กำหนดให้ประจุ $+q$ มีมวล m

$$q\{B\dot{z}\vec{a}_y + (E-B\dot{y})\vec{a}_z\} = m\{\ddot{y}\vec{a}_y + \ddot{z}\vec{a}_z\}$$

จากสมการข้างต้น จะได้ระบบสมการดังนี้

$$\ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \quad \text{—— (1)}$$

$$\ddot{z} = \frac{qB}{m}\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \quad \text{—— (2)}$$

หาอนุพันธ์ $\Rightarrow \frac{d}{dt}(1) \longrightarrow \dddot{y} = \frac{qB}{m}\ddot{z}$

ทำการแทนค่า $\ddot{z} \longrightarrow \dddot{y} = \frac{q^2B^2}{m^2}\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right)$

ให้ $p = \dot{y}$ และ $\omega = \frac{q^2B^2}{m^2}$ จะได้ว่า

$$\ddot{p} + \omega^2 p = \omega^2\frac{E}{B} \quad \text{—— (*)}$$

คำตอบของ (*) คือ

$$p(t) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t) + \frac{E}{B}$$

arbitrary constant

นั่นคือ

$$y(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{E}{B}t + C_3$$

แทนค่าใน (1) จะได้ว่า

$$z(t) = C_2\cos\omega t - C_1\sin\omega t + C_4$$

พิจารณา initial condition :

$y(0) = 0 : \; C_1 + C_3 = 0$

$z(0) = 0 : \; C_2 + C_4 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 : \; C_2\omega + \frac{E}{B} = 0$

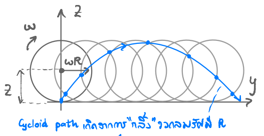
$\dot{z}(0) = 0 : \; C_1 = 0$

$C_2 = -\frac{E}{\omega B}$, $C_4 = \frac{E}{\omega B}$

$$\therefore \boxed{y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t)} \quad \boxed{z(t) = \frac{E}{\omega B}(1-\cos\omega t)}$$

เกิด cycloid motion

[$\omega = \frac{qB}{m}$ คือ Cyclotron frequency]



Cycloid path เกิดจากการ "กลิ้ง" วงกลมรัศมี R โดย mark จุดไว้บนวงกลม

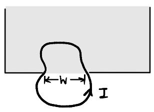
กำหนดให้ $R = \frac{E}{\omega B}$ ทำการจัดรูปจะได้ว่า

$$(y - R\omega t)^2 + (z-R)^2 = R^2$$

คือวงกลมรัศมี R ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, R\omega t, R)$

นั่นคือ กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $R\omega = \frac{E}{B}$ ในทิศ $+y$

⑳ A plane wire loop of irregular shape is situated so that part of it is in a uniform magnetic field $\vec{B}$ (in a figure, the field occupies the shaded region, and points perpendicular to the plane of the loop). The loop carries a current I. Show that the net magnetic force on the loop is $F = IBw$, where w is the chord subtended. Generalize this result to the case where the magnetic field region itself has an irregular shape. What is the direction of the force?



Sol^n จาก $\vec{F} = \int I d\vec{l}\times\vec{B}$

เนื่องจาก $\vec{B}$ คงที่ และสม่ำเสมอ จะได้ว่า

$$\vec{F} = (I\int d\vec{l})\times\vec{B}$$

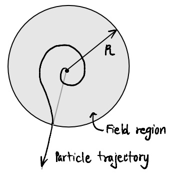
หากพิจารณาเฉพาะส่วนที่ตัดผ่านสนามแม่เหล็กจะได้ว่า

$\int d\vec{l} = \vec{w}$ (การกระจัดจากจุดที่กระแสไหลเข้าถึงจุดที่กระแสไหลออก จากบริเวณที่มี $\vec{B}$) **

$\therefore$ ขนาดของแรงคือ $F = IBw$ และ $\vec{w}\perp\vec{B}$ ส่งผลให้ $\vec{F}\perp\vec{w}$

(ในกรณีของรูปนี้ $\vec{w}$ มีทิศ ←)

㉑ A circularly symetrical magnetic field ($\vec{B}$ depends only on the distance from the axis), pointing perpendicular to the page, occupies the shaded region in a figure below. If the total flux ($\int\vec{B}\cdot d\vec{s}$) is zero, show that a charged particle that start out at the center will emerge from the region on a radial path (provided it escapes at all). On the reverse trajectory, a particle fired at the center away from outside will hit its target (if it has sufficient energy), though it may follow a weird route getting here.



Sol^n โมเมนตัมเชิงมุมจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุดศูนย์กลางไปยังขอบของวงกลมในรูปคือ

$$\vec{L} = \int\vec{\tau}\,dt = \int(\vec{r}\times q(\vec{v}\times\vec{B}))dt$$

$$= q\int(\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})) = q\left[\int(\vec{r}\cdot\vec{B})d\vec{l} - \int\vec{B}(\vec{r}\cdot d\vec{l})\right]$$

เนื่องจาก $\vec{r}\perp\vec{B}$ จะได้ว่า $\vec{r}\cdot\vec{B} = 0$

พิจารณา $d\vec{l} = d\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}\cdot d\vec{l} = \vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}dr^2 = \frac{1}{2\pi}2\pi r\,dr$

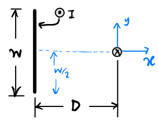
เพื่อให้ขอบเขต จาก $0\to R$

นั่นคือ $L = -\frac{q}{2\pi}\int_0^R B\,2\pi r\,dr = -\frac{q}{2\pi}\int\vec{B}\cdot d\vec{s} = -\frac{q\Phi}{2\pi}$

จากโจทย์ $\Phi = 0$ จะได้ว่า $L = 0$

การที่ประจุเคลื่อนออกมาด้วยโมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์ แสดงว่าสุดท้ายแล้วอนุภาคจะเคลื่อนที่ในแนวรัศมี ☒

㉒ The cross section of a long thin metal strip and a parallel wire is shown in a figure. Equal and opposite currents I flow in a conductors. Find the force per unit length on the metal strip.



Sol^n กำหนดให้กระแส I ในแท่งตัวนำไหลในทิศ $-z$

สนามแม่เหล็กจากแท่งตัวนำที่ระยะ r คือ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\vec{a}_\phi)$$

บนแผ่นตัวนำมีกระแสผิว $\vec{K}_s = \frac{I}{W}(+\vec{a}_z)$

แรงที่กระทำต่อแผ่นตัวนำ (ต่อหน่วยความยาว)

$$\vec{F}' = \int_0^1\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\vec{K}_s\,dy\,dx\times\vec{B} = \int_0^1\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\left(\frac{I}{W}\vec{a}_z\times\frac{-\mu_0 I}{2\pi\sqrt{D^2+y^2}}\vec{a}_\phi\right)dy\,dx$$

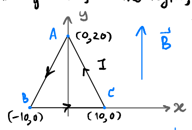
$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi W}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{D^2+y^2}}\vec{a}_r\right)dy = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi W}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{\cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y}{\sqrt{D^2+y^2}}dy$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi W}\int_{-W/2}^{W/2}\left(-\frac{D}{D^2+y^2}\vec{a}_x + \frac{y}{D^2+y^2}\vec{a}_y\right)dy = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi W}\left[-\tan^{-1}\left(\frac{y}{D}\right)\vec{a}_x + \ln(D^2+y^2)\vec{a}_y\right]_{-W/2}^{W/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi W}\left(-2\tan^{-1}\frac{W}{2D}\right)\vec{a}_x = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi W}\tan^{-1}\left(\frac{W}{2D}\right)\vec{a}_x$$

$$\therefore \boxed{\vec{F}' = -\vec{a}_x\frac{\mu_0 I^2\tan^{-1}(W/2D)}{\pi W}} \; [\text{N/m}]$$

㉓ A dc current I = 10 [A] flows in triangular loop in the xy-plane as shown in a figure. Assuming a uniform magnetic flux density $\vec{B} = \vec{a}_y 0.5$ [T] in the region, find the forces and torque on the loop. The dimensions are in [cm].



Sol^n Forces:

- $\vec{F}_{AB} = I(\vec{AB})\times\vec{B}$
  $= 10(-0.1\vec{a}_x - 0.2\vec{a}_y)\times(0.5\vec{a}_y)$
  $\vec{F}_{AB} = -0.5\vec{a}_z$ [N] —— (1)
- $\vec{F}_{BC} = 10(0.2\vec{a}_x)\times(0.5\vec{a}_y)$
  $= +1.0\vec{a}_z$ [N] —— (2)
- $\vec{F}_{CA} = 10(-0.1\vec{a}_x + 0.2\vec{a}_y)\times(0.5\vec{a}_y)$
  $= -0.5\vec{a}_z$ [N] —— (3)

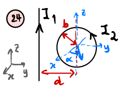
$\therefore \boxed{\Sigma\vec{F}_{CA} = \vec{0} \; [\text{N}]}$ * $\vec{F} = \oint I d\vec{l}\times\vec{B} = I(\underbrace{\oint d\vec{l}}_{\vec{0}})\times\vec{B}$

Torque

$$\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B} = I\vec{S}\times\vec{B} = 10\left(\tfrac{1}{2}\cdot 0.2\cdot 0.2\,\vec{a}_z\right)\times(0.5\vec{a}_y)$$

$$\boxed{\vec{\tau} = -0.1\vec{a}_x \; [\text{Nm}]}$$

㉔ If the circular loop in this figure is rotated about its axis by an angle α, find the torque exerted on the loop.



Sol^n แบ่งขดลวดเป็นชิ้นเล็กๆ ds จะได้ว่า

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int d(\vec{m}\times\vec{B}) = \int_s I_2(d\vec{s}\times\vec{B})$$

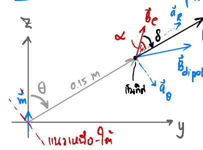
$$\vec{\tau} = I_2\int_s ds(\cos\alpha\,\vec{a}_x + \sin\alpha\,\vec{a}_y)\times\frac{\mu_0 I_1(-\vec{a}_z)}{2\pi(d+r\cos\phi)}$$

$$= \vec{a}_z\frac{1}{2\pi}\mu_0 I_1 I_2\sin\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^b\frac{1}{d+r\cos\phi}r\,dr\,d\phi$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{a}_z\,\mu_0 I_1 I\sin\alpha\,(d-\sqrt{d^2-b^2})}$$

** ㉕ A magnitized compass needle will line up with the earth's magnetic field. A small bar magnet (a magnetic dipole) with a magnetic moment 2 [A·m²] is placed at a distance 0.15 [m] from the center of a compass needle. Assuming the earth's magnetic flux density at the needle to be 0.1 [mT], find the maximum angle at which the bar magnet can cause the needle to deviate from the north-south direction. How should the bar magnet be oriented?

Sol^n พิจารณาแท่งแม่เหล็กเล็กๆ ที่วางตัวห่างจากเข็มทิศ 0.15 m. ดังรูป จะได้ว่า



สนามแม่เหล็กจากแท่งแม่เหล็กเล็กๆ

$$\vec{B}_{dipole} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\vec{a}_R 2\cos\theta + \vec{a}_\theta\sin\theta)$$

$$= \frac{(4\pi\times10^{-7})(2)}{4\pi\cdot(0.15)^3}(\vec{a}_R 2\cos\theta + \vec{a}_\theta\sin\theta)$$

$$= 0.59\times10^{-4}(\vec{a}_R 2\cos\theta + \vec{a}_\theta\sin\theta)$$

สมมติว่าสนามแม่เหล็กโลกวางตัวทำมุม α กับแนว $\vec{a}_R$ ดังรูป

จะได้ว่า $\vec{B}_e = (0.1\times10^{-3})(\vec{a}_R\cos\alpha - \vec{a}_\theta\sin\alpha)$

สนามแม่เหล็กลัพธ์ที่เข็มทิศ คือ

$$\vec{B}_{net} = 10^{-4}\{\vec{a}_R(1.18\cos\theta + \cos\alpha) + \vec{a}_\theta(0.59\sin\theta - \sin\alpha)\}$$

** เข็มทิศจะเบนไปทาง $\vec{B}_{net}$ **

จากรูป เบนจากทิศเหนือด้วยมุม

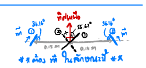
$$\delta = \alpha + \tan^{-1}\left(\frac{0.59\sin\theta - \sin\alpha}{1.18\cos\theta + \cos\alpha}\right)$$

พิจารณา $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ และ $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ เมื่อลองพล็อตกราฟ $\delta(\theta,\alpha)$ พบว่า ในขอบเขตดังกล่าว $|\delta|$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ

$$(\theta,\alpha) = (36.16^\circ, 90^\circ), (-36.16^\circ, -90^\circ)$$

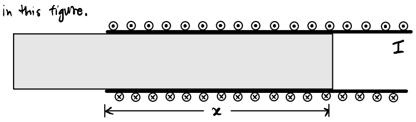
โดยที่ $|\delta| = 55.62^\circ$ ทั้งสองกรณี

ดังนั้น ถ้านำแท่งแม่เหล็กจิ๋ว ($m = 2$ A·m²) ไปวางห่างจากเข็มทิศที่ระยะ 0.15 [m] จะทำให้เข็มทิศเบนได้มากสุด $\boxed{55.62^\circ}$



** ต้องวาง $\vec{m}$ ในลักษณะนี้ **

㉖ A current I flows in a long solenoid with n closely wound coil-turns per unit length. The cross-sectional area of its iron core, which has permeability μ, is S. Determine the force acting on the force acting on the core if it is withdrawn to the position in this figure.



Sol^n พลังงานสะสมในสนามแม่เหล็ก $W_m = \frac{1}{2}\int\mu H^2 dv$

พิจารณา virtual displacement Δx

$$W_m(x+\Delta x) = W_m(x) + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{S\Delta x}(\mu-\mu_0)H^2 dv}_{\text{พลังงานที่เปลี่ยนไปเนื่องจากเติม } \mu \text{ เข้าไป } \Delta x}$$

$$= W_m(x) + \frac{1}{2}(\mu-\mu_0)n^2I^2S\Delta x$$

พลังงานที่เพิ่มขึ้นได้มาจากงานของแรงแม่เหล็ก

$$(F_m)_{\Delta x} = \frac{\partial W_m}{\partial x} = (\mu-\mu_0)n^2I^2S \quad (\text{ทิศ } +x)$$

ดังนั้น จะเกิดแรงดึง core ไปด้านในขนาด $\boxed{(\mu-\mu_0)n^2I^2S}$