Time-Varying Fields & Maxwell's Equations

- Faraday's Law
- Maxwell's Equations
- Potential Functions
- Electromagnetic Boundary Conditions
- Wave Equations & Solutions
- Time-Harmonic Fields

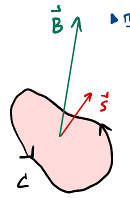
▸ Faraday's Law of Electromagnetic Induction

Faraday พบว่า เมื่อฟลักซ์แม่เหล็กเกิดการเปลี่ยนแปลงจะเกิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำ

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

เกิด emf ต้านการเปลี่ยนแปลงของ Φ : Lenz's law

induced emf; magnetic flux $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$



▸ กรณีที่ $\vec{B}$ เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Transformer emf)

เนื่องจาก $\mathcal{V} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ จะได้ว่า

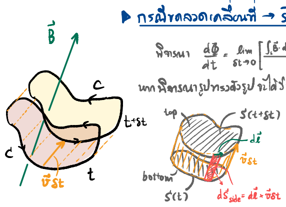
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$\vec{B}$ เปลี่ยนแปลงตามเวลา $\vec{S}$ อยู่ที่เดิม

สังเกตว่า ถ้าหาก $\vec{B}$ คงที่ แล้ว $\frac{d}{dt}\vec{B}=0$ นั่นคือ $\nabla\times\vec{E}=\vec{0}$

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{s}} \longleftrightarrow \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}}$$

transformer emf



▸ กรณีขดลวดเคลื่อนที่ → $\vec{S}$ เปลี่ยนแปลง (motional emf)

พิจารณา $\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\int \vec{B}\cdot d\vec{s}(t+\delta t) - \int \vec{B}\cdot d\vec{s}(t)}{\delta t}\right]$ มองว่าเป็น flux ที่พุ่งออกด้านข้างของปริมาตร

หากพิจารณารูปทรงสังรูป จะได้ว่า

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\int_{top}\vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{bottom}\vec{B}\cdot d\vec{s}}{\delta t}\right] \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{-\int_{side}\vec{B}\cdot d\vec{s}}{\delta t}\right] = \lim_{\delta t\to 0}\left[-\frac{\oint_C \vec{B}\cdot(d\vec{l}\times\vec{v}\delta t)}{\delta t}\right] = -\oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

top, bottom, $S(t+\delta t)$, $S(t)$, $d\vec{l}$, $\vec{v}\delta t$, $d\vec{s}_{side} = d\vec{l}\times\vec{v}\delta t$, $t+\delta t$, t

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}} \longleftrightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B}}$$

motional emf

** สามารถพิจารณางานจาก Lorentz force $W = \int(q\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ **

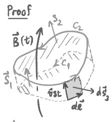
The general form of Faraday's law:

emf induced in a conducting circuit with contour C and surface S moves with a velocity $\vec{v}$ in a time-varying magnetic field.

$$\boxed{\oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} + \oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

$\mathcal{V}'$; transformer emf; motional emf

Proof



$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{S_2}\vec{B}(t+\delta t)\cdot d\vec{s}_2 - \int_{S_1}\vec{B}(t)\cdot d\vec{s}_1\right]$$

พิจารณา Taylor's series: $\vec{B}(t+\delta t) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\delta t + \ldots$

จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} + \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{S_2}\vec{B}\cdot d\vec{s}_2 - \int_{S_1}\vec{B}\cdot d\vec{s}_1\right]$$

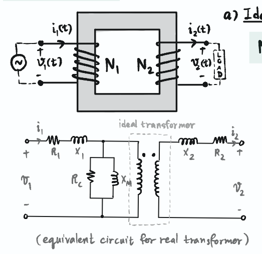
$$= \int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} + \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[-\int_{S_3}\vec{B}\cdot d\vec{s}_3\right]$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} - \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\oint_C \vec{B}\cdot(d\vec{l}\times\vec{v}\delta t)$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} - \oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \mathcal{V}' = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} + \oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \quad \square$$

Transformer: an alternating-current device that transforms voltages, currents, and impedances.



a) Ideal transformer ($\mu_r\to\infty$: ไม่มี Magnetizing current) (ไม่มี leakage flux) (ไม่มี Loss)

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad Z = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z'$$

refered to primary side; refered to secondary side

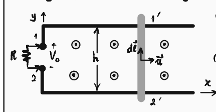
b) Real transformer

- มี Magnetizing current
- มี leakage flux
- มี losses : core loss, winding loss

ศึกษาเพิ่มเติมใน Electrical Machinery

(equivalent circuit for real transformer)

(ex) A metal bar slides over a pair of conducting rails in a uniform magnetic field $\vec{B} = \vec{a}_z B_0$ with a constant velocity $\vec{u}$, as shown in a figure. (a) Determine the open circuit voltage V_0 that appears across terminals 1 and 2. (b) Assuming that a resistance R is connected between the terminal, find the electric power discipated in R. (c) Show that this electric power is equal to the mechanical power required to move the sliding bar with a velocity $\vec{u}$. Neglect the electric resistance of the metal bar and of the conducting rails. Neglect also the mechanical friction at the contact points.



Sol^n (a) $V_0 = V_1 - V_2 = \oint_C(\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_{2'}^{1'}(\vec{a}_x u\times\vec{a}_z B_0)\cdot(\vec{a}_y dl)$

$\therefore \boxed{V_0 = -uB_0h}$

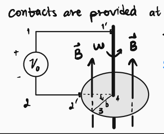
(b) Electric power $P_e = \frac{V_0^2}{R}$ $\therefore \boxed{P_e = \frac{u^2B_0^2h^2}{R}}$

(c) Magnetic force $\vec{F}_m = I\int_{2'}^{1'} d\vec{l}\times\vec{B} = -\vec{a}_x IB_0h = -\vec{a}_x\frac{uB_0^2h^2}{R}$

แรงที่ต้องต้านแรง $\vec{F}_m$ เพื่อให้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $\vec{F} = -\vec{F}_m = \vec{a}_x\frac{uB_0^2h^2}{R}$

Mechanical power: $P_m = \vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{u^2B_0^2h^2}{R}$ จะเห็นได้ว่า $P_m = P_e$ $\square$

(ex) The Faraday disk generator consists of a circular metal disk rotating with a constant angular velocity ω in a uniform and constant magnetic field $\vec{B} = \vec{a}_z B_0$ that is parallel to the axis of rotation. Brush contacts are provided at the axis and on the rim of the disk, as depicted in a figure below.



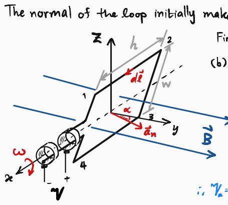
Determine the open circuit voltage of the generator if the radius of the disk is b.

Sol^n พิจารณาวงจร 122'4 1'1 จากรูป 2'4 จะเคลื่อนที่ "ตัด" สนามแม่เหล็ก (2'4 → 34)

Faraday's law: $V_0 = \oint_C(\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_3^4(\vec{a}_\phi r\omega\times\vec{a}_z B_0)\cdot(\vec{a}_r dr) = \omega B_0\int_b^0 r\,dr = \boxed{-\frac{\omega B_0 b^2}{2}}$

(ex) An h by w rectangular conducting loop is situated in a changing magnetic fied $\vec{B} = \vec{a}_y B_0\sin\omega t$. The normal of the loop initially make an angle α with $\vec{a}_y$, as shown in a figure.

Find the induced emf in the loop: (a) when the loop is at rest, and (b) when the loop rotates with an angular velocity ω about the x-axis



Sol^n a) The loop is at rest

$\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = (\vec{a}_y B_0\sin\omega t)\cdot(\vec{a}_n hw) = B_0hw\sin\omega t\cos\alpha$

$\therefore \mathcal{V}_a = -\frac{d\Phi}{dt} = \boxed{-B_0hw\omega\cos\omega t\cos\alpha}$

b) motional emf : $\mathcal{V}' = \oint_C(\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

$= \int_2^1\left[(\vec{a}_n\frac{w}{2}\omega)\times(\vec{a}_y B_0\sin\omega t)\right]\cdot(\vec{a}_x dx) + \int_4^3\left[(-\vec{a}_n\frac{w}{2}\omega)\times(\vec{a}_y B_0\sin\omega t)\right]\cdot(\vec{a}_x dx)$

$= wh\omega B_0\sin\omega t\sin\alpha$

$\mathcal{V}_b = \mathcal{V}_a + \mathcal{V}_a' = -B_0hw\omega[\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha]$

ที่เวลาใดๆ $\alpha = \omega t \Rightarrow \mathcal{V}_b = -B_0hw\omega(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t)$

$\therefore \boxed{\mathcal{V}_b = -B_0hw\omega\cos 2\omega t}$

▸ Maxwell's equations

Ampere's circuital law:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{enclosed}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\cdot\vec{J}_{enclosed} \quad \text{---} (*)$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (*) นั้นมีปัญหา เนื่องจาก

$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = 0$ (vector identity)

และ $\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_v$ (continuity equation)

Maxwell จึงเสนอว่า

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

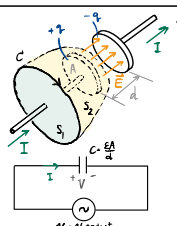
Gauss's law: $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{D})$$

จะได้ Ampere-Maxwell's equation

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}$: กระแสจาก free charge; $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$: กระแสจาก bound charge (Displacement current density)



จากรูป พิจารณาว่าตัวนำไม่มีความต้านทาน

จะได้ว่า $I = C\frac{d}{dt}V = -\frac{1}{d}\varepsilon AV_0\omega\sin\omega t$ [A]

พิจารณาวงปิด C (รัศมี r จากตัวนำ)

จาก Ampere's law (พิจารณาผิว S_1 ล้อมกระแส I)

จะได้ว่า $H_\phi = -\frac{\varepsilon AV_0\omega\sin\omega t}{2\pi rd}$ [A/m]

อย่างไรก็ตาม หากพิจารณาผิว S_2 ($I_{enclosed} = 0$)

ระหว่างแผ่นตัวเก็บประจุ $D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon V}{d} = \frac{1}{d}\varepsilon V_0\cos\omega t$ [C/m^2]

displacement current $I_D = \int_{S_2}(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D})\cdot d\vec{s}_2 = -\frac{\varepsilon AV_0\omega\sin\omega t}{d}$ [A]

จาก Ampere-Maxwell's eq.: $H_\phi = -\frac{\varepsilon AV_0\omega\sin\omega t}{2\pi rd}$ [A/m]

Maxwell's equations:

Differential form	Integral form	Significance
$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$	Gauss's law
$\nabla\cdot\vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$	No isolated magnetic charge
$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi$	Faraday's law
$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$	Ampere-Maxwell's equation

กรณี Static fields: $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = 0$, $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$

▸ Potential Functions

Faraday's law: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})$$

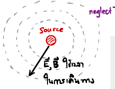
$$\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad \text{Conservative field}$$

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

ขึ้นกับประจุ ρ: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho}{R}dv'$; ขึ้นกับกระแส $\vec{J}$: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}}{R}dv'$

พิจารณาภายใต้ static conditions อย่างไรก็ตาม ตัวแปรต่างๆ นั้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามเวลา → time-retardation effects



neglect ได้เมื่อ $\rho, \vec{J}$ เปลี่ยนแปลงช้า (ความถี่ต่ำ) และ $R \ll \lambda$ (wavelength)

Quasi-static fields: $dV = \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon R}$, $d\vec{A} = \frac{\mu\vec{J}dv}{4\pi R}$ ประมาณว่าเวลาไม่มีผล

* ถ้าหาก source มีความถี่สูงและ R ไม่น้อยกว่า λ มากๆ จะต้องพิจารณา Time-retardation effects ด้วย!

Ampère-Maxwell's equation:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

พิจารณา homogeneous medium: $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

vector identity: $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} - \nabla\left(\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

Lorentz condition for potentials (Lorentz gauge)

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

จะได้ว่า

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}}$$

$\vec{A}$ เป็น wave ที่มี $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

(Nonhomogeneous wave equation for $\vec{A}$)

หากพิจารณา Gauss's law: $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$ จะได้ว่า

$$-\nabla\cdot\varepsilon\left(\nabla V + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \rho$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \varepsilon \text{ คงที่}$$

จาก Lorentz's condition จะได้ว่า

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

(Nonhomogeneous wave equation for V)

▸ Boundary Conditions

Electromagnetic boundary conditions (across an interface)

$E_{1t} = E_{2t}$	(E_t is continuous)
$\vec{a}_{n2}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$	($\vec{H}_t$ is discontinuous if $\vec{J}_s$ exists)
$\vec{a}_{n2}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$	($\vec{D}_n$ is discontinuous if ρ_s exists)
$B_{1n} = B_{2n}$	(B_n is continuous)

Interface between two lossless media

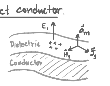
lossless → $\sigma = 0$; usually → $\rho_s = 0$, $J_s = 0$

$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$; $D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$

$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$; $B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$

Interface between dielectric and a perfect conductor

Dielectric's side	Perfect conductor's side
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$
$a_{n2}\times\vec{H}_1 = \vec{J}_s$	$H_{2t} = 0$
$a_{n1}\cdot\vec{D}_1 = \rho_s$	$D_{2n} = 0$
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$



* Good Conductors → $\sigma \sim 10^7$ S/m
* Superconductors → $\sigma \sim 10^{20}$ S/m Require extremely low temp.

▸ Wave Equations & Solutions

• Solutions of wave equation for potentials

- Electric potential : พิจารณาจุดประจุอยู่ที่ origin

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

ให้ $V(R,t) = \frac{1}{R}U(R,t)$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

นั่นคือ $U(R,t) = f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})$ → คลื่นเดินทางในทิศ +R ด้วยความเร็ว $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

$V(R,t) = \frac{1}{R}f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})$

พิจารณา จุดประจุขนาด $\rho(t)\Delta v'$ ที่ origin จะได้ว่า

$$\Delta V(R,t) = \frac{\rho(t)\Delta v'}{4\pi\varepsilon R} = \frac{1}{R}\Delta f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})$$

แสดงว่า $\Delta f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\rho(t)\Delta v'$

$$\therefore \boxed{V(R,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho(t - R/u)}{R}dv'}$$

(Retarded scalar potential)

velocity of propagation $u = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

- Vector magnetic potential

ทำนองเดียวกัน:

$$\boxed{\vec{A}(R,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}(t - R/u)}{R}dv'}$$

(Retarded vector potential)

• Source-free wave equations ($\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$)

พิจารณา simple nonconducting medium ($\sigma = 0$)

Maxwell's equation:

$\nabla\cdot\vec{E} = 0$ —— (1)

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$ —— (2)

$\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$ —— (3)

$\nabla\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ —— (4)

(3): $\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$$-\nabla^2\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$u = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

ในทำนองเดียวกัน:

$$\boxed{\nabla^2\vec{H} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

homogeneous vector wave equations

สมการทั้ง 2 ให้คำตอบเป็น time-harmonic fields ที่ steady state

$\vec{E}(\vec{R},t) = \vec{E}_0(\vec{R},t)\cos(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{R} + \phi_E)$

$\vec{H}(\vec{R},t) = \vec{H}_0(\vec{R},t)\cos(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{R} + \phi_H)$

Same ω; Amplitude; wave number: $k = \omega\mu\varepsilon$

(ex) Given $\vec{H} = H_0\sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_y$ [A/m]. Find displacement current density, $\vec{E}$, β such that this field exists. (Assume the source free media)

Sol^n Source free: $\vec{J} = \vec{0}$, $\rho_v = 0$

Ampere-Maxwell's eq. $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 0 & H_0\sin(\omega t - \beta z) & 0\end{vmatrix} = \vec{0} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$H_0\beta\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

∴ Displacement current density

$$\boxed{\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = H_0\beta\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x} \text{ [A/m}^2\text{]}$$

จาก $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = H_0\beta\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x$ [A/m^2]

จะได้ $\vec{D} = \frac{H_0\beta}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_x$ [C/m^2]

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{H_0\beta}{\omega\varepsilon}\sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \text{ [V/m]}}$$

$\vec{H}$ exists when it satisfies every Maxwell's equations

Faraday's law: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \frac{H_0\beta}{\omega\varepsilon}\sin(\omega t - \beta z) & 0 & 0\end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\vec{H}$$

$$\frac{H_0\beta^2}{\omega\varepsilon}\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_y = -\mu H_0\omega\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_y$$

$$\beta^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

$$\therefore \boxed{\beta = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \text{ [rad/m]}$$

▸ Time-Harmonics Fields

• Phasor : แปลง time domain เป็น frequency domain

$A_0\cos(\omega t + \phi) \rightarrow \mathrm{Re}[A_0 e^{j(\omega t + \phi)}] \rightarrow \mathrm{Re}[A_0 e^{j\phi}]$ (A_s)

$A_0\sin(\omega t + \phi) \rightarrow \mathrm{Re}[A_0 e^{j(\omega t + \phi - 90°)}] \rightarrow \mathrm{Re}[A_0 e^{j(\phi - 90°)}]$

[ระบบเชิงเส้น → ความถี่เดียว → $e^{j\omega t}$ สามารถละได้]

สามารถแสดงว่า $\frac{dA}{dt} = \mathrm{Re}(j\omega A_s)$ และ $\int A\,dt = \mathrm{Re}\left(\frac{A_s}{j\omega}\right)$

Maxwell's equations ในรูปของ Phasor

$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\rightarrow \nabla\times\vec{E}_s = -j\omega\mu\vec{H}_s$
$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\rightarrow \nabla\times\vec{H}_s = \vec{J}_{s,s} + j\omega\varepsilon\vec{E}_s$
$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$	$\rightarrow \nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_s = \rho_{v,s}$
$\nabla\cdot\vec{B} = 0$	$\rightarrow \nabla\cdot\mu\vec{H}_s = 0$

Nonhomogeneous wave equations:

ในรูป Phasor: $\nabla^2 V_s + k^2 V_s = -\rho/\varepsilon$, $\nabla^2\vec{A}_s + k^2\vec{A}_s = -\mu\vec{J}$ — Nonhomogeneous Helmholtz's equations

wave number: $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Lorentz condition : $\nabla\cdot\vec{A} + j\omega\mu\varepsilon V = 0$

Retarded Potentials:

$$\boxed{V_s(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho e^{-jkR}}{R}dv'}$$

$$\boxed{\vec{A}_s(R) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}e^{-jkR}}{R}dv'}$$

Taylor-series expansion: $e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2R^2}{2} + \ldots$

ในกรณีที่ $kR = 2\pi\frac{R}{\lambda} \ll 1$: $e^{-jkR} \approx 1$ → ประมาณเป็น Quasi-static fields ได้

Evalution steps

1) Find phasors $V_s(R)$, $\vec{A}_s(R)$ (Retarded potentials)
2) Find phasors $E_s(R) = -\nabla V_s - j\omega\vec{A}_s$, $\vec{B}_s(R) = \nabla\times\vec{A}_s$
3) Find $\vec{E}(R,t) = \mathrm{Re}[E_s(R)e^{j\omega t}]$, $\vec{B}(R,t) = \mathrm{Re}[\vec{B}_s(R)e^{j\omega t}]$ (time domain)

Source-free fields in simple media

• Simple, nonconducting media ($\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$, $\sigma = 0$)

$\nabla\times E_s = -j\omega\mu B_s$, $\nabla\times H_s = j\omega\varepsilon E_s$, $\nabla\cdot E_s = 0$, $\nabla\cdot B_s = 0$

$$\boxed{\nabla^2 E_s + k^2 E_s = 0} \quad \boxed{\nabla^2 H_s + k^2 H_s = 0}$$

(homogeneous vector Helmholtz's equations)

** $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ **

• Simple, conducting media ($\sigma \neq 0$) → $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

$$\nabla\times\vec{H}_s = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}_s = j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{E}_s = j\omega\varepsilon_c\vec{E}_s$$

** Complex permittivity : $\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$ **

นิยามให้ $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$ จะได้

• $\tan\delta_c = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \cong \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ (loss tangent)

loss angle

• good conductor: $\sigma \gg \omega\varepsilon$
• good insulator: $\omega\varepsilon \gg \sigma$

(ex) A sinusoidal electric density of amplitude 250 [V/m] and frequency 1 [GHz] exists in a lossy dielectric medium that has a relative permittivity of 2.5 and a loss tangent of 0.001. Find the average power dissipated in the medium per cubic meter.

Sol^n เนื่องจาก $\tan\delta_c = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} = 0.001$

จะได้ว่า $\sigma = (0.001)(\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) = (0.001)(2\pi\times 10^9)(\varepsilon_0)(2.5)$

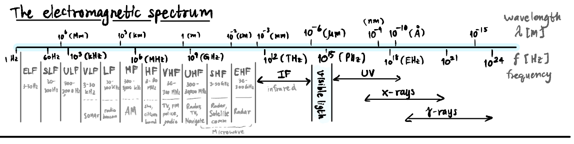
$\therefore \sigma = 1.39\times 10^{-4}$ [S/m]

กำลังต่อหน่วยปริมาตร

$p = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}\sigma E^2 = \frac{1}{2}(1.39\times 10^{-4})(250)^2$

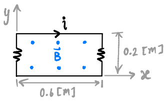
$\boxed{p = 4.34}$ [W/m^3]

The electromagnetic spectrum



Additional Problems

① The circuit in this figure is situated in a magnetic field



$\vec{B} = \vec{a}_z 3\cos(5\pi\times10^7 t - \frac{2}{3}\pi x)$ [μT]

Assuming $R = 15$ [Ω], find the current i.

Sol^n ฟลักซ์แม่เหล็กภายในวงปิด (ทิศตั้งตามเข็ม)

$\Phi(t) = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{y=0}^{y=0.2}\int_{x=0}^{x=0.6} (\vec{a}_z 3\cos(5\pi\times10^7 t - \frac{2}{3}\pi x))\cdot(-\vec{a}_z dx dy)$ [μWb]

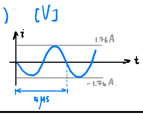
$= 3\times10^{-6}\times(0.2-0)\frac{3}{2\pi}\left[\sin(5\pi\times10^7 t - \frac{2}{5}\pi) - \sin(5\pi\times10^7 t)\right]$ [Wb]

$= \left(\frac{9\times10^{-7}}{10\pi}\right)\cdot 2\cos(5\pi\times10^7 t - \frac{1}{5}\pi)\sin(-\frac{1}{5}\pi)$ [Wb]

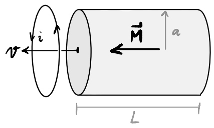
$emf = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -(90)\sin(\frac{\pi}{5})\sin(5\pi\times10^7 t - \frac{\pi}{5})$ [V]

$\therefore i = \frac{emf}{2R} = \boxed{-1.76\sin(5\pi\times10^7 t - \frac{\pi}{5}) \text{ [A]}}$

(ทิศทางตามรูปในโจทย์)



② A long cylindrical magnet of length L and radius a carries a uniform magnetization of $\vec{M}$ parallel to its axis. It passes at a constant velocity through a circular wire ring of slightly larger diameter. Graph the emf induced in the ring, as a function of time.



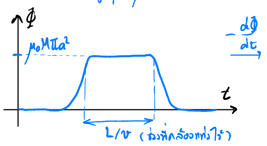
Sol^n ไม่มี free charge → $\vec{H} = \vec{0}$

∴ แท่งแม่เหล็กจะมีสนามแม่เหล็ก (ภายในแท่ง)

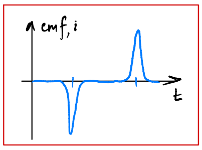
$\vec{B} = \mu_0\vec{M}$ (สม่ำเสมอ)

** บริเวณใกล้ปลาย สนามแม่เหล็กจะกระจายออก และกลายเป็น 0 เมื่อห่างออกไปมากๆ **

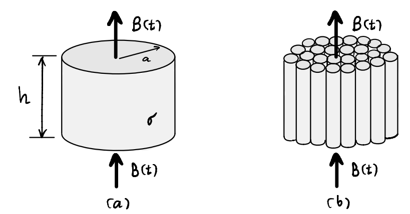
จะได้ว่า เมื่อห่วงเหล็กคล้องรอบแท่งแม่เหล็ก จะมีฟลักซ์แม่เหล็กสูงสุด $\mu_0 M\pi a^2$ นั่นคือ



$-\frac{d\Phi}{dt}$



③



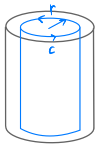
A suggested scheme for reducing eddy-current power loss in transformer cores with a circular cross section is to devide the cores with a circular cross section is to divide the cores into a large number of filament parts. As illustrated in a figure, the section shown in (a) is replaced by that in part (b). Assuming that $B(t) = B_0\sin\omega t$ and that N filamentary areas fill 95% of the original cross-sectional area, find

a) The average eddy-current power loss in the section of core of height h in a figure (a)

b) The total average eddy-current power loss in the N filamentary sections in a figure (b).

The magnetic field due to eddy currents is assumed to be negligible.

Sol^n a) พิจารณา Faraday's law ที่รัศมี r จาก ศก. ของแกนเหล็ก



$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$

$E\cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}B_0\sin\omega t\cdot\pi r^2$

$\therefore E = -\frac{1}{2}B_0\omega r\cdot\cos\omega t$

Power loss

$P = \int \sigma E^2 dv$

$P = \int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{4}\sigma B_0^2\omega^2 r^2\cos^2\omega t\cdot r dr d\phi dz$

$P = h\times2\pi\times\frac{1}{16}\sigma B_0^2\omega^2 a^4\cos^2\omega t$

กำลังสูญเสียเฉลี่ย : $P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{8}\sigma\pi h B_0^2\omega^2 a^4\cos^2(\omega t)dt$

$\therefore \boxed{P_{av} = \frac{1}{16}\sigma\pi h B_0^2\omega^2 a^4}$

b) พิจารณา $N\pi b^2 = 0.95\pi a^2$

จะได้ว่า $b^2 = \frac{0.95}{N}a^2$

กำลังสูญเสียในแต่ละแท่งเล็กๆ

$P_{av,b} = \frac{1}{16}\sigma\pi h B_0^2\omega^2\left(\frac{0.95}{N}a^2\right)^2$

ดังนั้น กำลังสูญเสียทั้งหมด คือ

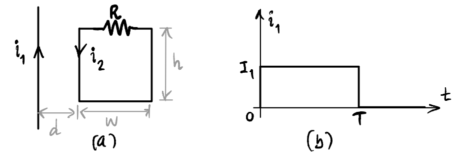
$P'_{av} = N\times\frac{1}{16}\sigma\pi h B_0^2\omega^2\cdot\frac{0.9025}{N^2}a^4$

$\boxed{P'_{av} = \frac{0.9025}{N}P_{av}}$

④ A rectangular loop of width w and height h is situated near a very long wire carrying i_1 in a figure (a). Assume i_1 to be a rectangular pulse as shown in a figure (b).

a) Find the induced current i_2 in the rectangular loop whose self-inductance is L.

b) Find the energy discipated in the resistance R if $T \gg R/L$



Sol^n พิจารณา KVL ของวงปิดจะได้ว่า $L_{12}\frac{d}{dt}i_1 = L\frac{d}{dt}i_2 + Ri_2$ ——(*)

โดยที่ $L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{1}{i_1}\int_0^h\int_d^{d+w}\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}drdz = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(1+\frac{w}{d})$

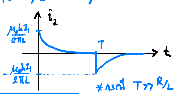
a) จากรูป (b) : $i(t) = I_1(u(t)-u(t-T))$ จะได้ว่า

Laplace transform (*) : พิจารณา $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$

$L_{12}I_1(1-e^{-sT}) = LsI_2(s) + RI_2(s) \rightarrow I_2(s) = \frac{L_{12}I_1(1-e^{-sT})}{sL+R} = \frac{L_{12}I_1(1-e^{-sT})}{L(s+\frac{R}{L})}$

$\therefore i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}I_2(s) = \frac{L_{12}I_1}{L}\left(u(t)e^{-\frac{R}{L}t} - u(t-T)e^{-\frac{R}{L}(t-T)}\right)$

$\boxed{i_2(t) = \frac{\mu_0 h I_1}{2\pi L}\left\{e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{R}{L}(t-T)}\right\}}$



* กรณี $T \gg R/L$

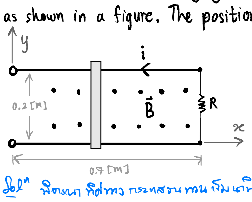
b) กรณี $T \gg \frac{R}{L}$ พลังงานไฟฟ้าที่สูญเสียใน R คือ

$W \cong 2\times\int_0^\infty\left(\frac{\mu_0 h I_1}{2\pi L}e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 R dt = 2R\times\frac{L}{2R}\times\left(\frac{\mu_0 h I_1}{2\pi L}\right)^2(1)$ $\therefore \boxed{W \cong \frac{1}{L}\left(\frac{\mu_0 h I_1}{2\pi}\right)^2}$

⑤ A conducting sliding bar oscillates over two parallel conducting rails in a sinusoidal varying magnetic field $\vec{B} = \vec{a}_z 5\cos\omega t$ [mT] as shown in a figure. The position of the sliding bar is

$x = 0.35(1-\cos\omega t)$ [m],

and the rails are terminated in a resistance $R = 0.2$ [Ω]. Find i.



Sol^n พิจารณา ทิศทางกระแสตามเข็มนาฬิกา

$\Phi(t) = \int_0^{0.2}\int_{x(t)}^{0.7}(\vec{a}_z 5\cos\omega t)\cdot(\vec{a}_z dx' dy')\times10^{-3}$

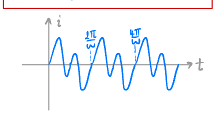
$= (0.2-0)(0.7-0.35(1-\cos\omega t))(5\cos\omega t)\times10^{-3}$

$= (3.5\times10^{-4})(\cos\omega t + \cos^2\omega t)$ [Wb]

$emf = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = (3.5\times10^{-4})\omega(\sin2\omega t + \sin\omega t)$ [V]

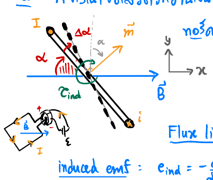
$i = \frac{emf}{R} = (1.75\times10^{-3})\omega(\sin2\omega t + \sin\omega t)$

$\boxed{i = 1.75\omega(\sin2\omega t + \sin\omega t) \text{ [mA]}}$



⑥ In the dc-motor, a current I sent through the loop in a magnetic field $\vec{B}$ produces a torque that makes the loop rotate. As the loop rotates, the amount of the magnetic flux linking with the loop changes, giving rise to an induced emf. Energy must be expended by an external electric source to counter this emf and establish the current in the loop. Prove that this electric energy is equal to the mechanical work done by the rotating loop.

Sol^n พิจารณาขดลวดภายในสนามแม่เหล็กดังรูป (ขดลวดขนาด a×b จำนวน N รอบ)



ทอร์ก : $\vec{\tau}_{ind} = \vec{m}\times\vec{B} = -\vec{a}_z NabI\cdot B\cos\alpha$

Mechanical work :

$W_m = \vec{\tau}_{ind}\cdot\Delta\vec{\alpha} = NabIB\cos\alpha\cdot\Delta\alpha$ ——(1)

Flux linking with the loop : $\Phi = NabB\sin\alpha$

induced emf : $e_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi = -NabB\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -NabB\cos\alpha\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

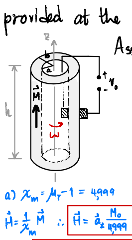
กำลังไฟฟ้าที่สูญเสียในขดลวดคือ

$P_e = IV = NabIB\cos\alpha\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

แหล่งกำเนิดต้องจ่ายกำลังเท่าที่สูญเสีย นั่นคือในช่วงเวลา Δt

→ จ่ายพลังงาน $W_e = NabIB\cos\alpha\Delta\alpha \longrightarrow \boxed{W_m = W_e}$

⑦ A hollow cylindrical magnet with inner radius a and outer radius b rotates about its axis at an angular frequency ω. The magnet has a uniform axial magnetization $\vec{M} = \vec{a}_z M_0$. Sliding brush contacts are provided at the inner and outer surfaces as shown in a figure.



Assuming that $\mu_r = 5{,}000$ and $\sigma = 10^7$ [S/m] for the magnet, find a) $\vec{H}$ and $\vec{B}$ in the magnet,

b) open-circuit voltage V_0,

c) short-circuit current.

a) $\chi_m = \mu_r - 1 = 4999$

$\vec{H} = \frac{1}{\chi_m}\vec{M}$ $\therefore \boxed{\vec{H} = \vec{a}_z\frac{M_0}{4999} \text{ [A/m]}}$

และ $\boxed{\vec{B} = \vec{a}_z\frac{5000}{4999}\mu_0 M_0 \text{ [T]}}$

b) $\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B}$

$= (\vec{a}_\phi\omega r)\times(\vec{a}_z\frac{5000}{4999}\mu_0 M_0)$

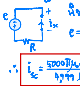
$= \vec{a}_r\frac{5000}{4999}\mu_0 M_0\omega r$

$V_0 = \oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_b^a\vec{E}\cdot(\vec{a}_r dr)$

$\therefore \boxed{V_0 = -\frac{2500}{4999}\mu_0 M_0\omega(b^2-a^2) \text{ [V]}}$

c) หาความต้านทาน R

$R = \int_a^b\frac{dr}{\sigma 2\pi r h} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma h}$ [Ω]

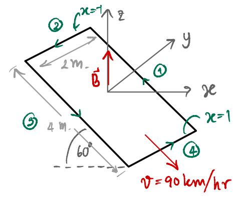


พิจารณาวงจรสมมูล

$e = \frac{2500}{4999}\mu_0 M_0\omega(b^2-a^2)$

$\therefore \boxed{i_{sc} = \frac{5000\pi\mu_0\sigma M_0\omega h(b^2-a^2)}{4999\ln(b/a)}}$ [A]

⑧ ภายในรถไฟฟ้ามีขดลวดสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2×4 [m²] มีความต้านทาน 1 kΩ รถไฟฟ้ากำลังวิ่งลงเนินซึ่งทำมุม 60° กับพื้น (แกน x) ด้วยความเร็ว 90 km/hr ส่งผลให้สนามแม่เหล็กขนาด sin(0.5πx) [T] พุ่งผ่านขดลวดในแนวตั้ง (แกน z)



ที่เวลา t = 0 [s] จุดสิ้นสุดของขดลวดอยู่ที่ x=0, y=0 และ z=0 จงคำนวณหากำลังไฟฟ้าที่ใช้ในขดลวด ที่เวลา t = 0 [s]

Sol^n * transformer emf = 0 : สนามแม่เหล็กไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา *

→ พิจารณา $\vec{v} = 90(\vec{a}_x\cos60° - \vec{a}_y\sin60°)$ km/hr $= 25(\vec{a}_x\frac{1}{2} - \vec{a}_z\frac{\sqrt{3}}{2})$ m/s

จะได้ว่า $\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B} = -\vec{a}_y 12.5\sin(0.5\pi x)$ [V/m]

motional emf (1 loop) $= \oint(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

$= 0 + \int_{-1}^{1}(-\vec{a}_y 12.5\sin(0.5\pi\cdot(-1)))\cdot(-\vec{a}_y dy) + 0$

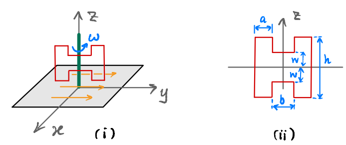
$+ \int_{1}^{-1}(-\vec{a}_y 12.5\sin(0.5\pi(1)))\cdot(\vec{a}_y dy)$

$= -50$ [V] (ที่ t = 0 s.)

motional emf (10 loops) $= -500$ [V]

ดังนั้น $P(t=0) = V^2/R = (-500)^2/1000 = \boxed{250 \text{ W}}$

⑨ ระบบกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าตัวหนึ่งประกอบด้วย แผ่นกระแสขนาดใหญ่อนันต์บนระนาบ x-y ที่มีความหนาแน่นกระแส $\vec{K}_s = 25\vec{a}_y$ [A/m] ไหลในทิศทางตามแกน +y และการหมุนบ่วงตัวนำรูปอักษร H รอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม 400π [rad/s] ทิศจาก +x ไป +y ดังรูป (i) โดยที่แกนหมุนเป็นยางไม่นำไฟฟ้า ถ้าขนาดของบ่วงและระยะห่างจากแกน z มีความสมมาตรดังรูป (ii) และบ่วงตัวนำมีความต้านทานภายใน 100 Ω จงหาฟังก์ชันตามเวลาของกระแสเหนี่ยวนำที่ไหลภายในบ่วง



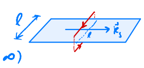
2ah+2bw

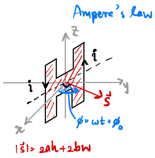
Sol^n พิจารณาสนามแม่เหล็กเหนือแผ่นอนันต์

Ampere's law: $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}$

$2B\cdot l = \mu_0(25)l$ $(l\to\infty)$

$B = 12.5\mu_0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{a}_x 12.5\mu_0$ [T]





$|\vec{S}| = 2ah+2bw$

พิจารณาฟลักซ์แม่เหล็ก

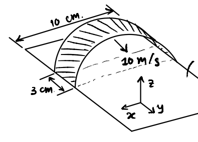
$\Phi(t) = \int_s\vec{B}\cdot d\vec{s} = 12.5\mu_0(2ah+2bw)\cos(\omega t+\phi_0)$ [Wb]

$emf = -\frac{d\Phi}{dt} = 25\mu_0\omega(ah+bw)\sin(\omega t+\phi_0)$ [V]

$i = \frac{emf}{R} = \frac{10000\pi\mu_0(ah+bw)\sin(400\pi t+\phi_0)}{100}$ [A]

$\boxed{i = 3.95(ah+bw)\sin(400\pi t+\phi_0) \text{ [mA]}}$

⑩ A thin semicircular conductor is moving along the fixed conductor plate. If the 10 W mechanical power is required to move the conductor at the constant velocity of $10\vec{a}_y$ [m/s].

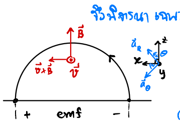


Given that $\vec{B} = 5z\vec{a}_z$ [mT], find

a) induced emf in the system (also indicate the direction of the current),

b) the resistance of semi-circular conductor (the plate has no resistance).

Sol^n a) เนื่องจากสนามแม่เหล็กไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จึงพิจารณาเฉพาะ motional emf $= \oint_c(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$



$\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B} = (10\vec{a}_y)\times(5z\vec{a}_z\times10^{-3}) = 0.05z\vec{a}_x$ [V/m]

กระแสจะไหลในตัวนำครึ่งวงกลมในทิศ $+\vec{a}_x$

(จากรูปคือไหลในทิศทวนเข็มนาฬิกา : ทิศ $+\vec{a}_\theta, \phi=0$)

จะได้ $emf = \int\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(0.05z\vec{a}_x)\cdot(\vec{a}_\theta 0.05d\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}0.05(0.05\cos\theta)\cos\theta\cdot(0.05)d\theta$

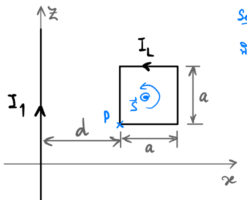
$= (1.25\times10^{-4})\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = 1.96\times10^{-4}$ [V]

$\therefore \boxed{emf = 1.96\times10^{-4} \text{ [V], กระแสไปในทิศ } +\vec{a}_\theta}$

b) พิจารณาว่า $P = \frac{emf^2}{R}$ จะได้ว่า $R = \frac{emf^2}{P} = \frac{(1.96\times10^{-4})^2}{10} = 3.86\times10^{-9}$ [Ω]

∴ ความต้านทานของตัวนำครึ่งวงกลมคือ $\boxed{3.86\times10^{-9} \text{ [Ω]}}$

⑪ เส้นลวดตัวนำยาวอนันต์ มีกระแสไหล $I(t) = I_0\sin(\omega t)$ [A] วางอยู่ในอากาศว่าง เมื่อเวลา $t=0$ ได้วางบ่วงตัวนำสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีขนาด $a\times a$ [m²] ไว้ที่ระยะห่างจากกระแสเส้นตรง d [m] ดังรูป ต่อจากนั้นที่เวลา $t>0$ บ่วงจัตุรัสได้เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_0(\vec{a}_x+\vec{a}_z)\cos(\omega t)$ [m/s] กำหนดให้ความต้านทานภายในของบ่วงตัวนำเท่ากับ R_0 [Ω] จงหากระแสเหนี่ยวนำในบ่วงจัตุรัสที่เวลา $t\geq 0$ [s]



Sol^n จาก Ampère's law จะได้ $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_1 \vec{a}_\phi}{2\pi r}$ [T]

พิจารณาตำแหน่งของมุมล่างซ้ายของขดลวดที่เวลาใดๆ จะได้ว่า

$$P(x,y,z) = \left(d+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t,\ 0,\ z_0+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right)$$

นั่นคือ $\Phi(t) = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_z^{z+a}\int_x^{x+a}\left(\dfrac{\mu_0 I_1 \vec{a}_\phi}{2\pi r}\right)\cdot(-\vec{a}_y\,dx'dz')$

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_z^{z+a}\int_x^{x+a} -\frac{1}{x'}dx'dy' = -\frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}\ln x'\Big|_x^{x+a}$$

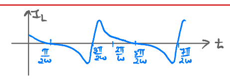
นั่นคือ $\Phi(t) = -\dfrac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)\cdot a}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a\omega}{d\omega+v_0\sin\omega t}\right)$ [Wb]

จาก Faraday's law จะได้ว่า

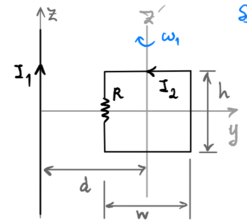
$$emf = -\frac{d\Phi}{dt} = \left\{\frac{\mu_0 I_0 a\omega\cos(\omega t)}{2\pi}\cdot\ln\left(1+\frac{a\omega}{d\omega+v_0\sin\omega t}\right) - \frac{\mu_0 I_0 a\sin\omega t}{2\pi}\cdot\frac{d\omega+v_0\sin\omega t}{\omega(d+a)+v_0\sin\omega t}\cdot\frac{a v_0\omega^2\cos\omega t}{(d\omega+v_0\sin\omega t)^2}\right\}$$

$I_L = \dfrac{emf}{R_0}$ จะได้ว่า

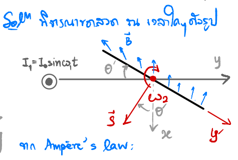
$$\boxed{I_L = \frac{\mu_0 I_0 a\omega}{2\pi R_0}\cos(\omega t)\left\{\ln\left(1+\frac{a\omega}{d\omega+v_0\sin\omega t}\right) - \frac{a v_0\omega\sin\omega t}{(d\omega+v_0\sin\omega t)(\omega(a+d)+v_0\sin\omega t)}\right\}}$$ [A]



⑫ A rectangular loop of width w and height h is situated near a very long wire carrying a current $I_1 = I_0\sin\omega_1 t$. Find the induced current I_2 in the loop when the loop rotates clockwise with an angular velocity ω_2 about the z'-axis.



Sol^n พิจารณาขดลวด ณ เวลาใดๆ ดังรูป



จาก Ampère's law:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{a}_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\frac{(-y\vec{a}_x + x\vec{a}_y)}{(x^2+y^2)}$$

กำหนดให้ $d\vec{S} = (\vec{a}_x\cos\theta' - \vec{a}_y\sin\theta')\,dz'dy'$

จะได้ว่า $\Phi(t) = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{-w/2}^{w/2}\int_{-h/2}^{h/2}\dfrac{y\cos\theta' + x\sin\theta'}{(x^2+y^2)}dz'dy'$ $\begin{Bmatrix} y = d + y'\cos\theta' \\ x = y'\sin\theta' \end{Bmatrix}$

$$\Phi(t) = -\frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi}\int_{-w/2}^{w/2}\frac{y'+d\cos\theta'}{(y'^2+2y'd\cos\theta'+d^2)}dy' = -\frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi}\int_{y'=-\frac{w}{2}}^{y'=\frac{w}{2}}\frac{1}{2(y'^2+2\ldots)}d(y'^2+2dy'\ldots)$$

$$\Phi(t) = -\frac{\mu_0 I_1 h}{4\pi}\ln\left(\frac{w^2+4wd\cos\theta'+4d^2}{w^2-4wd\cos\theta'+4d^2}\right) \text{ [Wb]}$$

แทนค่า $\theta' = \theta_0 + \omega_2 t$ จะได้ว่า

$$emf = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{-\frac{\mu_0 I_0 h\sin\omega_1 t}{4\pi}\ln\left(\frac{w^2+4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t)+4d^2}{w^2-4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t)+4d^2}\right)\right\}$$

$$= \left\{\frac{\mu_0 I_0\omega_1 h\cos\omega_1 t}{4\pi}\ln\left(\frac{w^2+4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t)+4d^2}{w^2-4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t)+4d^2}\right) - \frac{\mu_0 I_0 h\sin\omega_1 t}{4\pi}\left(\frac{8wd\omega_2(w^2+4d^2)\sin(\theta_0+\omega_2 t)}{(w^2+4d^2)^2-(4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t))^2}\right)\right\}$$

$\therefore I_2 = \dfrac{emf}{R}$ จะได้ว่า

$$\boxed{I_2 = \frac{\mu_0 I_0 h}{4\pi R}\left\{\omega_1\cos(\omega_1 t)\ln\left(\frac{w^2+4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t)+4d^2}{w^2-4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t)+4d^2}\right) - \left(\frac{8wd\omega_2\sin(\omega_1 t)\sin(\theta_0+\omega_2 t)}{(w^2+4d^2)^2-(4wd\cos(\theta_0+\omega_2 t))^2}\right)\right\}}$$ [A]

⑬ It is known that the electric field intensity of a spherical wave in free space is

$$\vec{E} = \vec{a}_\theta\frac{E_0}{R}\sin\theta\cos(\omega t - kR).$$

Determine $\vec{H}$ and k.

Sol^n Phasor: $\vec{E}_s = \vec{a}_\theta\dfrac{E_0}{R}\sin\theta e^{-jkR}$

Faraday's law: $\nabla\times\vec{E}_s = -j\omega\mu_0\vec{H}_s$

$$\frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{a}_R & \vec{a}_\theta R & \vec{a}_\phi R\sin\theta \\ \partial/\partial R & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ 0 & R\times\frac{E_0}{R}\sin\theta e^{-jkR} & 0\end{vmatrix} = -j\omega\mu_0\vec{H}_s$$

$$\frac{1}{R^2\sin\theta}\vec{a}_\phi R\sin\theta\cdot E_0\sin\theta(-jk)e^{-jkR} = -j\omega\mu_0\vec{H}_s$$

$\therefore\ \vec{H}_s = \vec{a}_\phi\dfrac{k}{\omega\mu_0}\dfrac{E_0}{R}\sin\theta e^{-jkR}$ [A/m]

ใน free space $\longrightarrow$ $\boxed{k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ [rad/m]

$$\boxed{\vec{H} = \vec{a}_\phi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{E_0}{R}\sin\theta\cos(\omega t - \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}R)}$$ [A/m]

⑭ For a source free polarized medium where $\rho=0$, $\vec{J}=\vec{0}$, $\mu=\mu_0$, but where there is a volume density of polarization $\vec{P}$, a single vector potential $\vec{\pi}_e$ may be defined such that $\vec{H} = j\omega\varepsilon_0\nabla\times\vec{\pi}_e$.
a) Express electric field intensity $\vec{E}$ in terms of $\vec{\pi}_e$ and $\vec{P}$
b) Show that $\vec{\pi}_e$ satisfies the non homogeneous Helmholtz's equation

$$\nabla^2\vec{\pi}_e + k_0^2\vec{\pi}_e = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

* the quantity $\vec{\pi}_e$ is known as the "electric Hertz potential".

Sol^n พิจารณา $\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$

จะได้ว่า $\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu_0(j\omega\varepsilon_0\nabla\times\vec{\pi}_e)$

$$\nabla\times\vec{E} = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\nabla\times\vec{\pi}_e$$

ให้ $k_0 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \longrightarrow \nabla\times(\vec{E} - k_0\vec{\pi}_e) = 0$

สามารถเขียนในรูป $\vec{E} - k_0\vec{\pi}_e = \nabla V_e$ —(*)

พิจารณา $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}^{\,0} + j\omega\vec{D}$

$\nabla\times\vec{H} = j\omega(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = j\omega\varepsilon_0\left(\vec{E}+\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)$ —(**)

นั่นคือ $\nabla\times(j\omega\varepsilon_0\nabla\times\vec{\pi}_e) = j\omega\varepsilon_0\left(\nabla V_e + k_0\vec{\pi}_e + \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)$

แต่ $j\omega\varepsilon_0(\nabla\times\nabla\times\vec{\pi}_e) = j\omega\varepsilon_0(\nabla\nabla\cdot\vec{\pi}_e - \nabla^2\vec{\pi}_e)$

ให้ $\nabla\cdot\vec{\pi}_e = V_e$ จะได้ว่า

$$\nabla V_e - \nabla^2\vec{\pi}_e = \nabla V_e + k_0\vec{\pi}_e + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

จัดรูปจะได้ว่า

b) $\nabla^2\vec{\pi}_e + k_0\vec{\pi}_e = -\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

a) $\vec{E} - k_0\vec{\pi}_e = \nabla(\nabla\cdot\vec{\pi}_e)$

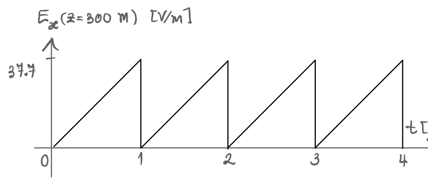
$\vec{E} = k_0\vec{\pi}_e + (\nabla^2\vec{\pi}_e + \nabla\times\nabla\times\vec{\pi}_e)$

เนื่องจาก $\nabla^2\vec{\pi}_e = -k_0\vec{\pi}_e - \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

ดังนั้น $\boxed{\vec{E} = \nabla\times\nabla\times\vec{\pi}_e - \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$

* สังเกตว่า $\vec{D} = \nabla\times\nabla\times\vec{\pi}_e$

⑮ ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าซึ่งแปรตามเวลาที่วัดได้ ณ ตำแหน่งบนระนาบ $z=300$ [m] ในอากาศว่างได้ผลดังกราฟข้างล่าง โดยในการวัดพบว่า ความเข้มสนามไฟฟ้ามีทิศทางตามแกน x เท่านั้น จงหา ก) ฟังก์ชันและทิศทางของความเข้มสนามแม่เหล็กที่แปรตามเวลาบนระนาบ $z=300$ [m] ข) ฟังก์ชันของความเข้มสนามไฟฟ้าที่แปรตามตำแหน่ง z ที่เวลา 2 [μs]



Sol^n พิจารณา $E_x(t) = (37.7t)$ ในช่วง $0<t<T$ เมื่อ $T = 1\,\mu s$

หา Fourier series: $E_x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$

หาค่า DC: $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T E_x(t)dt = \int_0^1 37.7t\,dt = 18.85$

หาค่า cosine: $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T E_x(t)\cos(n\omega t)dt = 2\int_0^1 37.7t\cos(2\pi nt)dt$

$$= 75.4\left[\frac{t\sin(2\pi nt)}{2\pi n} + \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\right]_0^1 = 0$$

หาค่า sine: $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T E_x(t)\sin(n\omega t)dt = 2\int_0^1 37.7t\sin(n\omega t)dt$

$$= 75.4\left[\frac{-t\cos(2\pi nt)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\right]_0^1 = -\frac{37.7}{\pi n}$$

ดังนั้น $E_x(t) = 18.85 - 37.7\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\sin(2\pi nt)\right)$ [V/m]

กำหนดให้ $E_x(z,t) = 18.85 - 37.7\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\sin(2\pi nt - \beta(z-300))\right)$, $\beta\in\mathbb{R}$

สำหรับแต่ละ harmonic ของ $E_x(z,t)$ จะได้ว่า $\vec{E}_s = \vec{a}_x E_n e^{-j(\beta z + \frac{\pi}{2})}$, $E_n = -\dfrac{37.7}{\pi n}$

Faraday's law: $\nabla\times\vec{E}_s = -j\omega\mu_0\vec{H}_s$

$\vec{a}_y(-j\beta E_n e^{-j(\beta z+\frac{\pi}{2})}) = -j\omega\mu_0\vec{H}_s$

นั่นคือ $\vec{H}_s = \vec{a}_y\dfrac{\beta E_n}{\omega\mu_0}e^{-j(\beta z+\frac{\pi}{2})}$ [A/m]

Ampere-Maxwell's eq.: $\nabla\times\vec{H}_s = j\omega\varepsilon_0\vec{E}_s$

$\vec{a}_x j\dfrac{\beta^2 E_n}{\omega\mu_0}e^{-j(\beta z+\frac{\pi}{2})} = j\omega\varepsilon_0\vec{E}_s$

$\vec{E}_s = \vec{a}_x\dfrac{\beta^2 E_n}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}e^{-j(\beta z+\frac{\pi}{2})}$

พบว่า $\beta^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \rightarrow \beta = \pm\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \pm 2\pi n/(3\times10^8)$ [rad/μs] [m/s]

$\therefore \beta = \dfrac{2\pi n}{300}$ [rad/m]

นั่นคือ $\dfrac{\beta E_n}{\omega\mu_0} = \pm\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_n \cong \pm\dfrac{1}{377}\left(\dfrac{37.7}{n\pi}\right) = \mp\dfrac{0.1}{n\pi}$

ก) สนามแม่เหล็กที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้า

$$\vec{H} = \mp\vec{a}_y 0.1\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\sin\left(n\omega t \mp \frac{n\omega}{3\times10^8}(z-300)\right)\right)$$

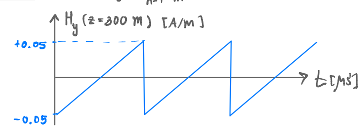
∴ ที่ $z=300$ [m]

H เคลื่อนที่ตามแกน y เท่านั้น

$$\boxed{\vec{H}(t) = \mp\vec{a}_y 0.1\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\sin(n\omega t)\right)}$$ [A/m] (t หน่วย μs)

ขึ้นกับทิศทางของคลื่นว่าไปทาง +z หรือ −z

กรณีไปทาง +z: $\vec{H}(t) = -\vec{a}_y 0.1\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\sin(n\omega t)\right)$ [A/m] : ที่ $z=300$



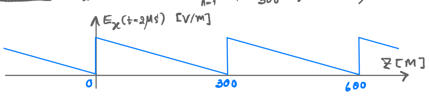
ข) แทนค่า $t = 2$ [μs], $\beta = \pm\dfrac{2\pi}{300}$ [rad/m]

↳ $\vec{E}(z) = 18.85 - 37.7\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(4\pi n \pm \dfrac{2\pi(z-300)}{300}\right)$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \vec{a}_x\left(18.85 \pm 37.7\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{2\pi(z-300)}{300}\right)\right)}$$ [V/m] (z หน่วย m)

ขึ้นกับทิศทางของคลื่นว่าไปทาง +z หรือ −z

กรณีไปทาง +z: $E_x(z) = 18.85 + 37.7\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{2\pi(z-300)}{300}\right)$: ที่ $t = 2\,\mu s$



⑯ If $\vec{H}_1 = \vec{a}_x 0.3\sin(2\pi\times10^6 t - \beta z - \frac{\pi}{3})$ and $\vec{H}_2 = \vec{a}_y 0.4\cos(2\pi\times10^6 t - \beta z)$

a) Find $\vec{E}(x,y,z,t)$ from the total magnetic field

b) If the total magnetic field $\vec{H}$ incidents on a flat perfect conductor at the normal angle relative to z-plane, calculate the surface current $\vec{J}_s$.

Sol^n Phasor: $\vec{H}_{1s} = \vec{a}_x 0.3e^{-j(\beta z+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})} = \vec{a}_x 0.3e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})}$ [A/m]

$\vec{H}_{2s} = \vec{a}_y 0.4e^{-j\beta z}$ (A/m)

Total magnetic field: $\vec{H}_s = \vec{H}_{1s} + \vec{H}_{2s} = \vec{a}_x 0.3e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})} + \vec{a}_y 0.4e^{-j\beta z}$ [A/m]

a) Faraday's law: $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$, พิจารณา $\vec{J}_f = \vec{0}$

จะได้ว่า

$$\vec{E}_s = \frac{\nabla\times\vec{H}}{j\omega\varepsilon_0} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0.3e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})} & 0.4e^{-j\beta z} & 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left\{\vec{a}_x(0.4j\beta e^{-j\beta z}) + \vec{a}_y(-0.3j\beta e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})})\right\}$$

$$= \vec{a}_x\frac{0.4\beta}{\omega\varepsilon_0}e^{-j\beta z} - \vec{a}_y\frac{0.3\beta}{\omega\varepsilon_0}e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})}$$

หาค่า β ที่สอดคล้องกับสมการ Maxwell : $\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$

$$\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{0.4\beta}{\omega\varepsilon_0}e^{-j\beta z} & -\frac{0.3\beta}{\omega\varepsilon_0}e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})} & 0\end{vmatrix} = -j\omega\mu_0\vec{H}_s$$

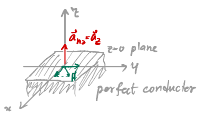
$$\vec{a}_x\left(-j\frac{0.3\beta^2}{\omega\varepsilon_0}e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})}\right) + \vec{a}_y\left(-j\frac{0.4\beta^2}{\omega\varepsilon_0}e^{-j\beta z}\right) = -j\omega\mu_0\left(\vec{a}_x 0.3e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})} + \vec{a}_y 0.4e^{-j\beta z}\right)$$

พบว่า $\dfrac{\beta^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0} = 1$ นั่นคือ $\beta = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon_0} \cong \pm\dfrac{2\pi\times10^6}{3\times10^8} = \pm\dfrac{\pi}{150}$ [rad/m]

แทนค่าจะได้ $\vec{E}_s = \pm\left\{\vec{a}_x 151e^{-j\beta z} - \vec{a}_y 113e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})}\right\}$

$$\therefore\ \boxed{\vec{E}(x,y,z,t) = \pm\left\{\vec{a}_x 151\cos\left(2\pi\times10^6 t \mp \frac{\pi}{150}z\right) - \vec{a}_y 113\cos\left(2\pi\times10^6 t \mp \frac{\pi}{150}z - \frac{5\pi}{6}\right)\right\}}$$ [V/m]

b) Perfect conductor: $\vec{J}_s = \vec{a}_{n2}\times\vec{H} = \vec{a}_z\times\vec{H}$

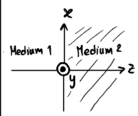


$\vec{J}_s = \vec{a}_z\times\left(\vec{a}_x 0.3e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})} + \vec{a}_y 0.4e^{-j\beta z}\right)$

$= -\vec{a}_x 0.4e^{-j\beta z} + \vec{a}_y 0.3e^{-j(\beta z+\frac{5\pi}{6})}$

$$\therefore\ \boxed{\vec{J}_s = -\vec{a}_x 0.4\cos\left(2\pi\times10^6 t \mp \frac{\pi}{150}z\right) + \vec{a}_y 0.3\cos\left(2\pi\times10^6 t \mp \frac{\pi}{150}z - \frac{5\pi}{6}\right)}$$ [A/m]

⑰ สนามเปิดโล่งที่กำลังพิจารณาเป็นตัวกลาง 2 ชนิด คือในบริเวณที่ 1 ($z<0$) และในบริเวณที่ 2 ($z>0$) ดังแสดงในรูป โดยมีคุณสมบัติของตัวกลางและความเข้มสนามไฟฟ้าดังนี้



• บริเวณที่ 1 ($z<0$): $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$ [F/m], $\mu_1 = \mu_0$ [H/m], $\sigma_1 = 0$ [S/m]

$\vec{E}_1 = \vec{a}_x 10\sin(10^9 t - k_1 z) + \vec{a}_x E_{01}\sin(10^9 t + k_1 z)$ [V/m]

• บริเวณที่ 2 ($z>0$): $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ [F/m], $\mu_2 = 100\mu_0$ [H/m], $\sigma_2 = 0$ [S/m]

$\vec{E}_2 = \vec{a}_x E_{02}\sin(10^9 t - k_2 z)$ [V/m]

จงหาค่า k_1 และ k_2 ที่สอดคล้องกับสมการ Maxwell และหาฟังก์ชันสนามไฟฟ้า $\vec{E}(z,t)$ และสนามแม่เหล็ก $\vec{H}(z,t)$ ที่บริเวณต่างๆ

Sol^n ทำโฟเซอร์ $\vec{E}_{1s} = \vec{a}_x\left(10e^{-j(k_1 z+\frac{\pi}{2})} + E_{01}e^{j(k_1 z-\frac{\pi}{2})}\right)$

และ $\vec{E}_{2s} = \vec{a}_x\left(E_{02}e^{-j(k_2 z+\frac{\pi}{2})}\right)$

จาก Faraday's law จะได้ว่า $\nabla\times\vec{E}_{1s} = -j\omega\mu_1\vec{H}_{1s}$

ได้ $\vec{H}_{1s} = \vec{a}_y\dfrac{k_1}{\omega\mu_1}\left(10e^{-j(k_1 z+\frac{\pi}{2})} - E_{01}e^{j(k_1 z-\frac{\pi}{2})}\right)$

จาก Ampere-Maxwell's eq.: $\nabla\times\vec{H}_1 = \vec{J}^{\,0} + j\omega\varepsilon_1\vec{E}_1$

ได้ $\vec{E}_1 = \vec{a}_x\dfrac{k_1^2}{\omega^2\mu_1\varepsilon_1}\left(10e^{-j(k_1 z+\frac{\pi}{2})} + E_{01}e^{j(k_1 z-\frac{\pi}{2})}\right)$

จะได้ว่า $k_1^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1 = \omega^2(\mu_0)(4\varepsilon_0) \rightarrow \boxed{k_1 = \pm 20/3}$ [rad/m]

ทำนองเดียวกัน: $\vec{H}_{2s} = \vec{a}_y\dfrac{k_2}{\omega\mu_2}\left(E_{02}e^{-j(k_2 z+\frac{\pi}{2})}\right)$

$k_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2 = \omega^2(100\mu_0)(\varepsilon_0) \rightarrow \boxed{k_2 = \pm 100/3}$ [rad/m]

พิจารณา Boundary's conditions: (ที่ interface $z=0$)

• $E_{1t} = E_{2t} \rightarrow 10e^{-j(k_1 z^0+\frac{\pi}{2})} + E_{01}e^{j(k_1 z^0-\frac{\pi}{2})} = E_{02}e^{-j(k_2 z^0+\frac{\pi}{2})}$

$10 + E_{01} = E_{02}$ —(1)

• $H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \dfrac{k_1}{\omega\mu_1}\left(10e^{-j(k_1 z^0+\frac{\pi}{2})} - E_{01}e^{j(k_1 z^0-\frac{\pi}{2})}\right) = \dfrac{k_2}{\omega\mu_2}E_{02}e^{-j(k_2 z^0+\frac{\pi}{2})}$

$10 - E_{01} = \dfrac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}E_{02} = \dfrac{1}{20}E_{02}$ —(2)

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $E_{01} = \dfrac{190}{21}$ [V/m] และ $E_{02} = \dfrac{400}{21}$ [V/m]

∴ บริเวณที่ 1: $\vec{E}_{1s} = \vec{a}_x\left(10e^{-j(\pm\frac{20}{3}z+\frac{\pi}{2})} + \frac{190}{21}e^{j(\pm\frac{20}{3}z-\frac{\pi}{2})}\right)$

นั่นคือ $\boxed{\vec{E}_1(z,t) = \vec{a}_x\left\{10\sin\left(10^9 t \mp \frac{20}{3}z\right) + \frac{190}{21}\sin\left(10^9 t \pm \frac{20}{3}z\right)\right\}}$

และ $\vec{H}_{1s} = \vec{a}_y(\pm 5.3\times10^{-3})\left(10e^{-j(\pm\frac{20}{3}z+\frac{\pi}{2})} - \frac{190}{21}e^{j(\pm\frac{20}{3}z-\frac{\pi}{2})}\right)$

$$\boxed{\vec{H}_1(z,t) = \pm\vec{a}_y\left\{53\sin\left(10^9 t \mp \frac{20}{3}z\right) - 47.95\sin\left(10^9 t \pm \frac{20}{3}z\right)\right\}}$$ [mA/m]

บริเวณที่ 2: $\vec{E}_{2s} = \vec{a}_z\left\{\frac{400}{21}e^{-j(\pm\frac{100}{3}z+\frac{\pi}{2})}\right\}$

นั่นคือ $\boxed{\vec{E}_2(z,t) = \vec{a}_x\left\{\frac{400}{21}\sin\left(10^9 t \mp \frac{100}{3}z\right)\right\}}$ [V/m]

และ $\vec{H}_{2s} = \vec{a}_y(\pm 2.65\times10^{-5})\left\{\frac{400}{21}\sin\left(10^9 t \mp \frac{100}{3}z\right)\right\}$

$$\boxed{\vec{H}_2(z,t) = \vec{a}_y\left\{0.505\sin\left(10^9 t \mp \frac{100}{3}z\right)\right\}}$$ [mA/m]